

Міністерство освіти і науки України  
Державний заклад  
«Луганський національний університет імені Тараса Шевченка»

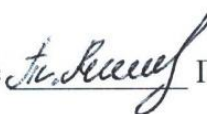
Навчально-науковий інститут математики та інформаційних  
технологій

Кафедра математики та інформатики

Трибушна Ганна Борисівна

МЕТОДИКА ВИВЧЕННЯ ВЕКТОРІВ У ПРОСТОРІ В КУРСІ  
МАТЕМАТИКИ НА РІВНІ СТАНДАРТУ

кваліфікаційна робота  
здобувача вищої освіти другого (магістерського) рівня  
освітня програма «Математика»  
за спеціальністю 014.04 «Середня освіта (Математика)»

Особистий підпис  Ганна Трибушна

Науковий керівник \_\_\_\_\_ Юрій ЖУЧОК.

доктор фізико-математичних наук професор  
кафедри математики та інформатики

Полтава – 2025

## ЗМІСТ

<b>ВСТУП.....</b>	<b>4</b>
<b>РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ЗАСАДИ ВИВЧЕННЯ ВЕКТОРІВ У ПРОСТОРИ.....</b>	<b>6</b>
1.1. Поняття вектора. Координати вектора. ....	7
1.2. Дії над векторами. Векторний простір. ....	9
1.3. Скалярний і векторний добуток векторів.....	12
1.4. Мікс-добуток векторів.....	13
1.5. Висновки до розділу 1 .....	17
<b>РОЗДІЛ 2. МЕТОДИКА ВИВЧЕННЯ ВЕКТОРІВ У ПРОСТОРИ..</b>	<b>18</b>
2.1. Цілі та завдання вивчення теми. Місце теми в курсі математики. .	18
2.2. Методи та прийоми викладання теми. Використання дидактичних матеріалів.....	22
2.3. Формування просторового мислення. Розвиток логічного мислення. ....	29
2.4. Використання міжпредметних зв'язків. ....	31
2.5. Висновки до розділу 2 .....	34
<b>РОЗДІЛ 3. АНАЛІЗ ТИПОВИХ ПОМИЛОК ТА ЇХ УСУНЕННЯ .</b>	<b>35</b>
3.1. Помилки при визначенні координат вектора. ....	35
3.2. Типові помилки при виконанні дій над векторами. ....	38
3.3. Деякі помилки при розв'язуванні задач. ....	42
3.4. Рекомендації щодо усунення помилок. ....	46
3.5 Висновки до розділу 3 .....	48
<b>РОЗДІЛ 4. ДИДАКТИЧНІ МАТЕРІАЛИ .....</b>	<b>49</b>
4.1. Конспекти уроків.....	49
4.2. Тестові завдання. ....	64
4.3. Задачі для самостійного розв'язання.....	75
4.4. Висновки до розділу 4 .....	80
<b>ВИСНОВКИ.....</b>	<b>81</b>
<b>СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....</b>	<b>83</b>
<b>ДОДАТКИ</b>	

Додаток А. Таблиця координат одиничних векторів.

Додаток Б. Формули для дій над векторами.

Додаток В. Приклади розв'язання задач.

## ВСТУП

Тема вивчення векторів у просторі займає важливе місце в курсі математики на рівні стандарту. Вектори є фундаментальним математичним поняттям, яке знаходить широке застосування в різних галузях науки та техніки, таких як фізика, інформатика, інженерія тощо. Опанування цього поняття сприяє розвитку просторового мислення, формуванню уявлень про багатовимірні структури та математичні моделі реальних процесів.

Однак, незважаючи на важливість теми, учні часто стикаються з труднощами при її вивченні. Це може бути пов'язано як із абстрактністю матеріалу, так і з недостатньо розвиненими навичками роботи з просторовими об'єктами. Саме тому необхідно розробити ефективні методики викладання цієї теми.

**Актуальність** даної теми полягає в необхідності підвищення якості викладання математики, а також розвитку в учнів компетенції, необхідних для подальшого вивчення суміжних дисциплін. Методика вивчення векторів у просторі має бути адаптованою до сучасних вимог і враховувати індивідуальні особливості учнів, їхні інтереси та рівень підготовки.

**Мета магістерської роботи** – розробити ефективну методику вивчення векторів у просторі для учнів, що навчаються за стандартним рівнем математичної підготовки.

**Об'єкт дослідження** – процес навчання математики на рівні стандарту в середній школі.

**Предмет дослідження** – методика вивчення векторів у просторі в курсі математики, її дидактичні та методичні аспекти.

### Методи дослідження

Теоретичні методи:

- ✓ Аналіз наукової літератури з методики викладання математики.
- ✓ Узагальнення педагогічного досвіду.
- ✓ Моделювання методичних підходів до викладання теми «Вектори в просторі».

Емпіричні методи:

- ✓ Спостереження за навчальним процесом.
- ✓ Проведення експериментального навчання.
- ✓ Опитування учнів та вчителів щодо ефективності методики.

Статистичні методи:

- ✓ Обробка даних, отриманих у ході педагогічного експерименту.
- ✓ Аналіз результатів успішності учнів до і після застосування

методики.

Робота складається зі вступу, 4 розділів, висновків, списку використаних джерел та літератури.

Для досягнення цієї мети необхідно вирішити низку таких завдань:

1. Проаналізувати теоретичні засади викладання теми «Вектори в просторі».
2. Оцінити існуючі методики викладання теми в шкільній практиці.
3. Розробити й експериментально перевірити нові підходи до викладання векторів.
4. Сформулювати рекомендації для вчителів щодо оптимізації процесу навчання даної теми.

У результаті дослідження передбачається отримати нові підходи до викладання векторів, які можуть бути впроваджені в шкільну практику з метою підвищення рівня знань учнів.

**Апробація результатів магістерської роботи:** результати магістерського дослідження були оприлюднені на днях науки кафедри математики та інформатики ЛНУ імені Тараса Шевченка.

# РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ЗАСАДИ ВИВЧЕННЯ ВЕКТОРІВ У ПРОСТОРИ

Історія вивчення векторів у просторі розпочалася з розвитком геометрії та фізики, коли виникла потреба описувати напрямлені величини, як-от переміщення або сили. Ось кілька основних етапів у розвитку цього поняття:

## 1. Давня Греція і початкові уявлення про вектори.

У Давній Греції поняття векторів ще не існувало, але основи геометрії, закладені Евклідом та Архімедом, підготували ґрунт для розвитку цієї ідеї. Вони розглядали довжини, площі та кути, але не мали поняття «вектора» в сучасному розумінні [39].

## 2. Ренесанс і початок формування ідей векторів.

Перші спроби описати фізичні величини, що мають напрямок, з'явилися під час Ренесансу, коли науковці намагалися зрозуміти механіку руху. Наприклад, Галілей досліджував рух тіл і розробляв концепції, що передували сучасному уявленню про вектори.

## 3. 17 століття – розвиток аналітичної геометрії.

Рене Декарт (1596–1650) зробив значний внесок у розвиток аналітичної геометрії, яка дозволила представляти геометричні фігури в координатах. Це стало першим кроком до математичного опису напрямлених величин у просторі [3].

## 4. 18 століття – вектори в механіці.

Ісаак Ньютон (1643–1727) і його закони механіки впровадили ідеї сил, що мають як величину, так і напрямок. Це підготувало основу для введення векторів у фізику, хоча формально вектори ще не були визначені як математична абстракція.

## 5. 19 століття – формалізація векторів.

Ідея вектора як математичного об'єкта сформувалася у XIX столітті завдяки працям таких математиків, як:

➤ Вільям Роуен Гамільтон (1805–1865) – ввів кватерніони, які можна вважати розширенням векторів у тривимірному просторі. Це була спроба описати обертання в тривимірному просторі [24].

➤ Герман Грассман (1809–1877) – одним із перших почав формально розвивати ідею багатовимірної алгебри, включаючи операції над векторами, такі як додавання та скалярний добуток.

6. Кінець 19 – початок 20 століття – векторний аналіз.

Завдяки працям Джозая Вілларда Гіббса (1839–1903) і Олівера Хевісайда (1850–1925) прогресували сучасні концепції векторного аналізу, такі як векторний добуток і застосування векторів у фізиці. Це зробило вектори одним із центральних інструментів для опису механіки, електромагнетизму та інших фізичних явищ [3].

### **1.1. Поняття вектора. Координати вектора.**

Вектор — це математичний об'єкт, який має дві основні характеристики: величину (або модуль) і напрямок. Найпростіше вектор можна уявити як напрямлений відрізок, що з'єднує дві точки в просторі чи на площині. Вектори широко використовуються в математиці, фізиці та інших науках для опису різноманітних явищ і процесів, які мають як кількісне значення, так і напрямок [36].

Основні властивості вектора:

1. Модуль (довжина) вектора — це числове значення, що визначає відстань між початковою і кінцевою точкою вектора. Вектор довжиною 1 називається одиничним вектором.

2. Напрямок вектора — це орієнтація вектора в просторі або на площині. Він задається від початкової точки до кінцевої.

Вектори можуть бути різними за своїми властивостями, і це дозволяє класифікувати їх за кількома критеріями:

1. Нульовий вектор – це вектор, модуль якого дорівнює нулю, тобто початок і кінець такого вектора збігаються. Він не має чітко визначеного напрямку.

2. Колінеарні вектори – це вектори, які лежать на одній прямій або на паралельних прямих. Вони можуть бути однаково або протилежно спрямованими.

3. Ортогональні вектори – це вектори, які утворюють між собою прямий кут. У тривимірному просторі це вектори, які не мають спільної лінії напрямку та взаємно перпендикулярні.

4. Одиничний вектор – це вектор, модуль якого дорівнює одиниці. Такі вектори часто використовуються для позначення напрямку, незалежно від величини [4].

Для опису векторів у геометричному просторі використовуються координати, які дозволяють представити вектор числовими значеннями відносно вибраної системи координат.

У двовимірному просторі, де вектори розташовані на площині, їх координати визначаються за допомогою початкової та кінцевої точок вектора.

Якщо вектор  $\vec{a}$  починається в точці  $A(x_1, y_1)$  і закінчується в точці  $B(x_2, y_2)$ , то координати вектора  $\vec{a}$  обчислюються за формулою:

$$\vec{a} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$

Координати вектора показують, на скільки зміщуються значення по осі  $x$  та осі  $y$  при переміщенні з точки  $A$  в точку  $B$  [28].

Наприклад, якщо вектор  $\vec{a}$  починається в точці  $A(1, 2)$  і закінчується в точці  $B(4, 5)$ , то його координати будуть:  $\vec{a} = (4-1, 5-2) = (3, 3)$ .

У тривимірному просторі вектор має три координати, оскільки розташування точки визначається трьома осями:  $x$ ,  $y$  і  $z$ .

Якщо вектор  $\vec{a}$  починається в точці  $A(x_1, y_1, z_1)$  і закінчується в точці  $B(x_2, y_2, z_2)$ , то координати вектора  $\vec{a}$  визначаються так:

$$\vec{a} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

Таким чином, координати вектора показують зміщення по всіх трьох осях простору.

Наприклад, якщо вектор починається в точці  $A(2, 3, 1)$  і закінчується в точці  $B(5, 6, 4)$ , його координати будуть:  $\vec{a} = (5-2, 6-3, 4-1) = (3, 3, 3)$ .



Модуль вектора визначає його довжину і обчислюється як відстань між початковою і кінцевою точками. Для вектора з координатами  $\vec{a} = (x, y)$  на площині модуль обчислюється за формулою:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Для тривимірного вектора  $\vec{a} = (x, y, z)$  модуль обчислюється так:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Геометрично вектор на площині можна уявити як стрілку, початок якої відповідає одній точці, а кінець — іншій. Координати вектора показують, як далеко і в якому напрямку переміщена точка. У просторі вектор також визначає напрямок і відстань переміщення між двома точками у трьох вимірах [20].

Вектор — це один з основних математичних об'єктів, який використовується для опису величин із напрямком і модулем. Координати вектора дозволяють зручно працювати з ним у системі координат, обчислювати його модуль, додавати і виконувати інші математичні операції.

## 1.2. Дії над векторами. Векторний простір.

Вектори є основою багатьох математичних та фізичних моделей, і для ефективного використання їх у різних застосуваннях важливо вміти виконувати певні математичні операції над векторами. Основними діями з векторами є додавання, віднімання, множення на скаляр, скалярний і векторний добутки.

Додавання векторів виконується за правилом трикутника або паралелограма. Геометрично це означає, що до кінця одного вектора приєднується початок іншого, і результат — це вектор, який з'єднує початок першого вектора з кінцем другого [11].

Якщо маємо два вектори  $\vec{a} = (x_1, y_1)$  і  $\vec{b} = (x_2, y_2)$ , то їх сума:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

У тривимірному просторі сума векторів обчислюється аналогічно:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{z} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2).$$

Віднімання векторів також виконується покомпонентно. Якщо маємо два вектори  $\vec{a} = (x_1, y_1)$  і  $\vec{b} = (x_2, y_2)$ , то їх різниця:

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2) [38].$$

Для тривимірного простору різниця векторів:

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{z} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2).$$

Множення вектора на число (скаляр) призводить до зміни його довжини без зміни напрямку (якщо скаляр додатній). Якщо  $\lambda$  — це скаляр, а  $\vec{a} = (x_1, y_1)$ , то:

$$\lambda \cdot \vec{a} = (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot y_1).$$

У тривимірному просторі:

$$\lambda \cdot \vec{a} = (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot y_1, \lambda \cdot z_1) [36].$$

Якщо  $\lambda$  від'ємне, то напрямок вектора змінюється на протилежний.

Скалярний добуток двох векторів — це операція, результатом якої є число (скаляр). Він обчислюється як добуток модулів векторів і косинуса кута між ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta.$$

Аналітично для векторів у координатній формі  $\vec{a} = (x_1, y_1)$  і  $\vec{b} = (x_2, y_2)$  скалярний добуток обчислюється так:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2.$$

У тривимірному просторі:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

Скалярний добуток використовується для визначення кута між векторами та перевірки їх ортогональності. Якщо скалярний добуток дорівнює нулю, то вектори ортогональні (перпендикулярні) [25].

Векторний добуток двох векторів дає новий вектор, який перпендикулярний до площини, утвореної двома вихідними векторами. Його модуль визначається як площа паралелограма, побудованого на цих векторах:

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta.$$

Векторний добуток двох векторів  $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$  і  $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$  обчислюється за допомогою визначника матриці:

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

де  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$  — одиничні вектори координатних осей. Результат — новий вектор, перпендикулярний до обох вихідних [3].

Векторний простір (або лінійний простір) — це математична структура, що складається з множини векторів і операцій над ними (додавання векторів і множення вектора на скаляр), які задовольняють певні аксіоми. Векторний простір має ключове значення в лінійній алгебрі та багатьох інших галузях математики [19].

Основні поняття векторного простору:

1. Нульовий вектор: кожен векторний простір має нульовий вектор  $\vec{0}$ , для якого справедливе рівняння  $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$  для будь-якого вектора  $\vec{a}$ .
2. Комутативність додавання: для будь-яких двох векторів  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  справедливе рівняння  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ .
3. Асоціативність додавання: для будь-яких трьох векторів  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  справедливе рівняння  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ .
4. Множення на скаляр: для будь-якого скаляра  $\lambda$  і вектора  $\vec{a}$  справедливе рівняння  $\lambda \cdot \vec{a}$ .
5. Одиничний скаляр: множення на скаляр 1 залишає вектор без змін:  $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ .
6. Лінійна комбінація векторів: будь-який вектор у векторному просторі може бути представлений лінійна комбінація інших векторів. Наприклад, вектор  $\vec{c}$  можна записати у вигляді  $\vec{c} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n$ , де  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  — скаляри [40].

Базис векторного простору — це набір лінійно незалежних векторів, які утворюють всі інші вектори простору за допомогою лінійних комбінацій.

Розмірність векторного простору — це кількість векторів у його базисі. Наприклад, двовимірний простір має розмірність 2, тривимірний — розмірність 3 тощо.

Векторні простори є важливими для розуміння таких математичних концепцій, як системи лінійних рівнянь, матриці та лінійні перетворення.

### 1.3. Скалярний і векторний добуток векторів.

Скалярний добуток (або внутрішній добуток) двох векторів — це операція, результатом якої є число (скаляр). В геометричному сенсі він характеризує проекцію одного вектора на напрямок іншого і може використовуватися для обчислення кута між векторами.

Для двох векторів  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  скалярний добуток визначається як:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta.$$

де  $\theta$  — кут між векторами, а  $|\vec{a}|$  і  $|\vec{b}|$  — модулі (довжини) векторів.

Якщо вектори задані у вигляді своїх координат:

$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ , то скалярний добуток обчислюється як сума добутків відповідних координат:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$ .

Властивості скалярного добутку:

1. Комутативність:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ .
2. Лінійність:  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ .
3. Ортогональність: Якщо  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ , то вектори  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  ортогональні (перпендикулярні) [33].

Векторний добуток (або зовнішній добуток) — це операція, результатом якої є новий вектор, перпендикулярний до обох вихідних векторів. Векторний добуток використовується для обчислення площі паралелограма, утвореного двома векторами, а також для визначення напрямку в тривимірному просторі [17].

Для векторів  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  векторний добуток визначається так:

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta \hat{n}.$$

де  $\theta$  — кут між векторами, а  $\hat{n}$  — одиничний вектор, перпендикулярний до площини, утвореної векторами  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ .

Для векторів  $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$  і  $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$  векторний добуток обчислюється за допомогою визначника:

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

де  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$  — одиничні вектори координатних осей. Результатом є новий вектор:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = (y_1 z_2 - z_1 y_2, z_1 x_2 - x_1 z_2, x_1 y_2 - y_1 x_2)$  [29].

Властивості векторного добутку:

1. Антикомутативність:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -(\vec{b} \cdot \vec{a})$ .
2. Результат — вектор: Векторний добуток двох векторів завжди дає вектор, перпендикулярний до площини, в якій лежать вихідні вектори.
3. Правило правої руки: Напрямок вектора результату визначається за допомогою правила правої руки: якщо пальці правої руки спрямовані від першого вектора до другого, то великий палець показує напрямок вектора-добутку.

Скалярний добуток дає число, яке визначає величину проекції одного вектора на інший і може бути використане для обчислення кута між векторами.

Векторний добуток дає новий вектор, перпендикулярний до площини вихідних векторів, і використовується в задачах, що потребують визначення площі або напрямку в просторі [40]

#### 1.4. Мікс-добуток векторів.

Мікс-добуток векторів (або змішаний добуток) — це операція, яка включає скалярний і векторний добутки трьох векторів. Результатом мікс-добутку є скаляр (число), і ця операція широко використовується в геометрії тривимірного простору для обчислення об'єму паралелепіпеда, утвореного трьома векторами.

Для трьох векторів  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  і  $\vec{c}$  мікс-добуток визначається як скалярний добуток вектора  $\vec{a}$  на векторний добуток векторів  $\vec{b}$  і  $\vec{c}$ :  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ .

Це число дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ , і  $\vec{c}$ .

Якщо вектори  $\vec{a}=(x_1, y_1, z_1)$ ,  $\vec{b}=(x_2, y_2, z_2)$ ,  $\vec{c}=(x_3, y_3, z_3)$ , то мікс-добуток обчислюється як визначник матриці:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Величина цього визначника дорівнює об'єму паралелепіпеда, утвореного трьома векторами. Якщо мікс-добуток дорівнює нулю, то вектори лежать в одній площині (їхній паралелепіпед має нульовий об'єм) [22]

Геометричне значення:

1. Об'єм паралелепіпеда. Мікс-добуток визначає об'єм паралелепіпеда, побудованого на трьох векторах. Якщо мікс-добуток позитивний, то вектори утворюють праву систему координат; якщо негативний — ліву.

2. Ортогональність. Якщо мікс-добуток дорівнює нулю, то вектори є компланарними, тобто лежать в одній площині.

Властивості мікс-добутку:

➤ Зміна порядку. Мікс-добуток змінює знак при перестановці двох будь-яких векторів:  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = -(\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{c}))$ .

➤ Лінійність. Мікс-добуток є лінійним по кожному з аргументів, тобто:  $\vec{a} \cdot (\lambda_1 \vec{b} + \lambda_2 \vec{c}) = \lambda_1 (\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})) + \lambda_2 (\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}))$ .

➤ Нульовий результат: Якщо мікс-добуток дорівнює нулю, то вектори компланарні, і їхній паралелепіпед вироджується в площину [11].

Мікс-добуток трьох векторів — це важлива операція, яка дозволяє обчислювати об'єми паралелепіпедів і визначати компланарність векторів.

Державний стандарт України для освітніх програм з математики визначає наскрізні лінії як тематичні або змістовні компоненти, це певні концепції, ідеї або навички, які пронизують весь навчальний процес, від

початкових класів до старшої школи. Це допомагає учням будувати зв'язки між предметами і розуміти практичне застосування теоретичних знань [13].

При вивченні векторів у просторі можна виділити такі наскрізні лінії:

1. Математичне моделювання:
  - Представлення реальних об'єктів і явищ за допомогою векторних моделей.
  - Розв'язування задач на рух, статику, кінематику за допомогою векторних методів.
  - Використання векторів для опису геометричних перетворень.
2. Геометрична інтерпретація:
  - Візуалізація векторів у тривимірному просторі.
  - Зв'язок між алгебраїчними операціями над векторами та геометричними перетвореннями.
  - Застосування векторів для доведення геометричних теорем.
3. Абстрактне мислення:
  - Розуміння абстрактних понять.
  - Формулювання і доведення теорем про вектори.
  - Узагальнення понять і властивостей векторів на більш складні математичні об'єкти.
4. Використання інформаційних технологій:
  - Застосування комп'ютерних програм для побудови графіків векторів, виконання векторних обчислень і візуалізації геометричних задач.
  - Використання онлайн-ресурсів для самостійного вивчення матеріалу та розв'язування задач.

Приклади реалізації наскрізних ліній

- ✓ Початкова школа:
  - Введення поняття вектора як напрямленого відрізка на площині.
  - Використання векторів для опису руху об'єктів у просторі.
- ✓ Базова школа:
  - Дослідження властивостей лінійних операцій над векторами.
  - Застосування векторів для розв'язування задач на проектування.

- ✓ Профільна школа:
- Вивчення векторних просторів і лінійних операцій.
- Застосування векторного аналізу для розв'язування задач фізики [12].

Наскрізнi лiнii забезпечують:

1. Послiдовнiсть у вивченнi математики: знання, отриманi на початкових етапах навчання, стають основою для подальшого вивчення.
2. Глибоке розумiння математичних понять: учнi не просто запам'ятовують формули, а розумiють їх геометричний змiст i взаємозв'язки.
3. Готовнiсть до застосування математичних знань на практицi: учнi вчаться використовувати математичнi моделi для розв'язування реальних задач [13].

Вивчення векторiв у просторi - це не просто засвоєння набору формул, а розвиток абстрактного мислення, геометричної iнтуїцiї та вмiння застосовувати математичнi знання для розв'язування рiзноманiтних задач. Наскрiзнi лiнii допомагають зробити цей процес бiльш ефективним i цiкавим для учнiв.



## ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 1

У першому розділі магістерської роботи було здійснено огляд теоретичних засад вивчення векторів у просторі, що є основою для подальшого дослідження. Аналіз наукових джерел та літератури показав, що векторні поняття мають важливе значення не лише у шкільній програмі, але й у широкому контексті математичних дисциплін та прикладних наук.

Зокрема, отримано такі результати:

1. Визначено базові поняття, пов'язані з векторами, зокрема, їх геометричне та алгебраїчне трактування, а також введено поняття векторного простору.
2. Розглянуто основні дії над векторами (додавання, віднімання, множення на скаляр, скалярний і векторний добутки), що є фундаментальними операціями у векторному аналізі.
3. Окреслено важливість використання векторів у просторі для опису фізичних та геометричних явищ, що робить їх незамінним інструментом у розв'язуванні прикладних задач.
4. Проаналізовано основні методи вивчення векторів у шкільному курсі математики, включаючи як геометричні підходи, так і алгебраїчні методи.

Таким чином, розділ заклав теоретичне підґрунтя для подальшого дослідження методики викладання векторів у курсі математики на рівні стандарту. Отримані результати будуть використані для розробки практичних підходів та дидактичних матеріалів у наступних розділах роботи.

## РОЗДІЛ 2. МЕТОДИКА ВИВЧЕННЯ ВЕКТОРІВ У ПРОСТОРИ

Вивчення векторів у просторі є важливим етапом математичної освіти. Завдяки глибокому розумінню цієї теми здобувачі освіти зможуть успішно опановувати інші розділи математики та застосовувати отримані знання для розв'язання різноманітних задач [8].

Застосування сучасних технологій дозволяє зробити процес вивчення векторів більш цікавим та ефективним. Інтерактивні дошки, 3D-моделі, симуляції допомагають візуалізувати абстрактні математичні поняття та зробити навчання більш наочним.

### **2.1. Цілі та завдання вивчення теми. Місце теми в курсі математики.**

Постановка цілей і завдань має важливе значення як у навчанні, так і в будь-якій діяльності. Ось ключові причини, чому це важливо:

1. **Чіткість наряду.** Цілі визначають кінцевий результат, до якого прагнеш. Завдяки цьому ти розумієш, що потрібно досягти, і не відхиляєшся від плану.
2. **Мотивація.** Коли перед собою ставиш конкретні завдання, з'являється внутрішній стимул їх виконати. Кожна досягнута ціль мотивує рухатися далі.
3. **Ефективне планування.** Цілі та завдання допомагають структурувати процес навчання або роботи. Це дозволяє ефективно розподіляти час і ресурси.
4. **Контроль за прогресом.** Чітко сформульовані цілі дозволяють відстежувати свій прогрес. Можна оцінити, наскільки наблизився до результату, і коригувати свої дії, якщо щось іде не так.
5. **Розвиток дисципліни.** Ставлячи перед собою конкретні завдання, людина вчиться краще організовувати свій час і роботу, що розвиває самодисципліну.

6. Фокусування на пріоритетах. Завдяки цілям і завданням ти можеш визначити найважливіші аспекти роботи або навчання і зосередитися на них, не розпорошуючи увагу на другорядні речі.

7. Підвищення результативності. Ставлячи перед собою чіткі завдання, ти більше зосереджуєшся на їх досягненні, що робить твої дії більш цілеспрямованими та продуктивними.

8. Поліпшення самооцінки. Досягнення поставлених цілей підвищує самооцінку, оскільки це дає відчуття успіху й прогресу [42].

Таким чином, цілі і завдання дозволяють структурувати процес навчання, зробити його більш ефективним і результативним [7].

При вивченні даної теми в навчальних закладах оперуються на такі основні цілі:

1. Формування основних понять.

Учні мають зрозуміти основні поняття, пов'язані з векторами, такі як: вектор, модуль вектора, напрямлений вектор, колінеарність та ортогональність векторів.

2. Розвиток навичок роботи з векторами.

Учні повинні навчитися виконувати основні операції над векторами: додавання, віднімання, множення на скаляр, скалярний та векторний добутки.

3. Застосування векторів для розв'язання геометричних та фізичних задач.

Вивчення векторів допомагає учням краще зрозуміти різні фізичні та математичні явища та процеси, зокрема в механіці та аналітичній геометрії.

4. Розвиток просторового мислення.

Вивчення векторів сприяє формуванню уявлення про тривимірний простір та його особливості [24].

Основними завданнями даної теми є:

1. Ознайомлення учнів з основними властивостями векторів.

Навчити учнів розуміти властивості векторів та вміти застосовувати їх у різних ситуаціях.

## 2. Формування навичок графічного зображення векторів.

Учні повинні вміти графічно представляти вектори в двовимірному та тривимірному просторах, визначати їх модуль і напрямок.

## 3. Розвиток математичних навичок обчислень.

Учні повинні навчитися правильно виконувати математичні операції з векторами (додавання, віднімання, множення на число, скалярний та векторний добутки).

## 4. Застосування знань для розв'язання задач.

Використовувати вектори для розв'язання практичних задач з геометрії, фізики та інших галузей знань.

## 5. Інтеграція з іншими розділами математики.

Використання векторів в курсі аналітичної геометрії, що розвиває здатність учнів вирішувати комплексні задачі на перетині кількох математичних тем [40].

Вивчення цієї теми надає учням інструменти для подальшого вивчення складніших понять у вищій математиці, фізиці та інженерних науках.

Тема «Вектори у просторі» посідає важливе місце в курсі математики на рівні стандарту, оскільки вона є основою для розуміння багатьох інших математичних концепцій та розділів. Ось як ця тема інтегрується в загальний курс математики:

### 1. Базова геометрія та алгебра

Вектори є невід'ємною частиною аналітичної геометрії, яка вивчає геометричні об'єкти та їхні властивості за допомогою алгебраїчних методів. У процесі вивчення векторів закладаються основи для розуміння лінійних перетворень та розв'язання геометричних задач.

### 2. Тривимірний простір та просторове мислення

Вектори допомагають учням сформувати уявлення про тривимірний простір. Це важливо для подальшого вивчення стереометрії та розуміння таких понять, як площини, пряма в просторі, кути між векторами, об'єми багатогранників [3].

### 3. Аналітична геометрія

Аналітична геометрія на площині та в просторі значною мірою базується на векторних методах. Наприклад, рівняння прямої та площини в просторі, взаємне розташування об'єктів, знаходження відстаней і кутів у просторі — все це спирається на поняття векторів.

### 4. Фізичні застосування

Вектори відіграють ключову роль у фізичних задачах, зокрема в механіці, де поняття сили, швидкості, прискорення та інші фізичні величини описуються векторно. Це дозволяє інтегрувати математичні знання з природничими науками, роблячи математику більш прикладною.

### 5. Лінійна алгебра [2].

Вивчення векторів є підґрунтям для розуміння лінійної алгебри, яка включає в себе такі поняття, як векторні простори, лінійні перетворення, матриці, детермінанти. Це необхідно для подальшого навчання в університеті та для розуміння сучасних математичних теорій.

### 6. Розвиток математичних навичок та логіки

Робота з векторами розвиває вміння учнів оперувати абстрактними математичними поняттями, що важливо для розвитку їхнього математичного мислення. Учні вчаться працювати з абстрактними математичними об'єктами, виконувати операції з ними та розуміти їхні властивості.

Зв'язок з іншими темами курсу математики:

- Лінійні рівняння та нерівності: методи векторного аналізу застосовуються при вирішенні систем лінійних рівнянь та аналізі лінійних залежностей.
- Похідні та інтеграли: у вищій математиці, при вивченні диференціального та інтегрального числення, вектори використовуються для вивчення градієнтів, похідних за напрямком та потоків.
- Тригонометрія: знання векторів дозволяє краще зрозуміти тригонометричні функції, оскільки вектори часто описуються через кути між ними та використовуються для розв'язання трикутників [34].

Отже, дана тема є важливою ланкою між різними розділами математики, оскільки вона допомагає учням краще розуміти не тільки просторові відносини та їхні алгебраїчні вирази, але й закладає основи для подальшого розвитку математичної грамотності.

## **2.2. Методи та прийоми викладання теми. Використання дидактичних матеріалів.**

Викладання теми може бути ефективним завдяки застосуванню різних методів та прийомів, які допоможуть учням краще зрозуміти та засвоїти матеріал. Ось кілька основних методів та прийомів:

### **1. Пояснювально-ілюстративний метод**

Опис: Учитель пояснює теоретичний матеріал, використовуючи схеми, малюнки та презентації. Це може бути графічне представлення векторів у просторі на площині або використання програм для візуалізації тривимірних об'єктів [10].

Прийоми:

- ✓ Демонстрація графічних моделей векторів.
- ✓ Використання мультимедійних презентацій для візуалізації різних операцій з векторами.
- ✓ Пояснення з опорою на конкретні приклади.

### **2. Евристичний (пошуковий) метод [30].**

Опис: Учні активно залучені до пошуку рішень завдань. Вчитель ставить проблемні питання, що підштовхують до самостійного виведення формул або способів розв'язку.

Прийоми:

- ✓ Постановка проблемних запитань: як знайти скалярний або векторний добуток двох векторів?
- ✓ Пошук загальних властивостей векторів через експерименти або практичні завдання.
- ✓ Обговорення різних варіантів застосування векторів у фізиці чи геометрії.

### 3. Метод практичних завдань

Опис: Під час уроку учні розв'язують практичні завдання з векторами, що допомагає їм засвоїти матеріал через активне застосування знань.

Прийоми:

- ✓ Розв'язання задач на обчислення довжини вектора, кутів між векторами, векторні й скалярні добутки.
- ✓ Робота в парах або групах для розв'язання комплексних завдань.
- ✓ Виконання завдань на побудову графічних моделей векторів.

### 4. Проєктний метод [34].

Опис: Учні працюють над довготривалими проєктами, що включають застосування знань про вектори для вирішення реальних проблем або створення моделей.

Прийоми:

- ✓ Створення моделей у 3D-програмі для демонстрації роботи векторів у просторі.
- ✓ Проєкти, пов'язані з фізичними явищами (наприклад, дослідження сил або руху в тривимірному просторі).
- ✓ Проєкт на тему використання векторів у комп'ютерній графіці або програмуванні.

### 5. Інтерактивні методи [6].

Опис: Взаємодія між учнями під час уроку через використання сучасних технологій та групову роботу.

Прийоми:

- ✓ Використання інтерактивних дошок для візуалізації векторів і їхніх операцій.
- ✓ Вправи на побудову векторів у віртуальній реальності або симуляціях.
- ✓ Інтерактивні тести та вікторини для перевірки знань у реальному часі.

## 6. Метод проблемного навчання

Опис: Учні стикаються з проблемними ситуаціями, які вони повинні вирішити, використовуючи знання про вектори.

Прийоми:

- ✓ Постановка задачі з багатьма невідомими, що вимагає застосування різних операцій із векторами.
- ✓ Пошук вирішення задач із реального життя (наприклад, завдання на визначення траєкторії руху об'єкта).
- ✓ Проведення обговорень для пошуку різних підходів до вирішення проблем.

## 7. Гра як метод навчання

Опис: Використання ігор для засвоєння знань про вектори, що стимулює інтерес до теми.

Прийоми:

- ✓ Гра в групах на швидке розв'язання задач з векторами.
- ✓ Створення математичних головоломок, де вектори є частиною розв'язку.
- ✓ Використання онлайн-ігор або програм для вивчення теми через інтерактивні завдання [8].

## 8. Інтегративний підхід

Опис: Інтеграція теми «Вектори у просторі» з іншими дисциплінами, такими як фізика, інформатика або інженерія.

Прийоми:

- ✓ Показ зав'язків між векторами в математиці та їх використанням у фізиці (наприклад, сили, швидкість).
- ✓ Розробка проєктів, що вимагають програмування та використання векторів у 3D графіці.
- ✓ Залучення учнів до міждисциплінарних проєктів, де застосовуються вектори.

Комбінація різних методів і прийомів викладання дозволяє урізноманітнити навчальний процес, зацікавити учнів і забезпечити глибоке



засвоєння знань. Це також допомагає врахувати різні типи сприйняття інформації учнями (візуальні, аудіальні, кінетичні) та адаптувати викладання до потреб конкретної групи [6].

Використання дидактичних матеріалів є важливою складовою ефективного навчання. Вони допомагають зробити процес навчання більш наочним, зрозумілим і цікавим для учнів. Дані матеріали можуть відіграти ключову роль у засвоєнні складних понять, операцій і прикладів. Ось як і які дидактичні матеріали можна використовувати:

#### 1. Друковані дидактичні матеріали

Опис: Друковані матеріали, такі як схеми, таблиці, картки із завданнями та формулами, допомагають учням швидко знайти необхідну інформацію та мати її під рукою під час вирішення завдань.

Види матеріалів:

- ✓ Схеми: Візуальне представлення векторів у просторі, операцій додавання, віднімання та множення векторів.
- ✓ Таблиці: Формули для обчислення довжини вектора, скалярного та векторного добутку.
- ✓ Картки: з прикладами завдань різної складності, де потрібно виконати обчислення з векторами.

Застосування:

- Роздавати учням схеми й таблиці для використання під час самостійної роботи.
- Використовувати картки для закріплення матеріалу шляхом розв'язання задач на швидкість.

#### 2. Інтерактивні дидактичні матеріали

Опис: Використання інтерактивних технологій, таких як мультимедійні презентації, навчальні програми та симуляції, дає змогу учням вивчати тему більш захоплююче та наочно [14].

Види матеріалів:

- ✓ Мультимедійні презентації: Відео чи анімації, що показують, як працюють вектори в просторі, приклади реальних застосувань векторів.

✓ Онлайн-тести: Інтерактивні тести з миттєвим зворотним зв'язком для перевірки знань.

✓ Симуляції: Програми для візуалізації руху векторів у тривимірному просторі.

Застосування:

- Використовувати презентації на уроці для пояснення складних операцій з векторами.

- Створювати або використовувати готові онлайн-тести для самостійної або групової перевірки знань.

- Використовувати симуляції для практичного вивчення векторів у динаміці, наприклад, у задачах фізики [43].

### 3. Геометричні моделі

Опис: Вектори в тривимірному просторі можуть бути складними для уявлення, тому використання моделей допомагає учням краще розуміти просторові взаємодії між векторами.

Види матеріалів:

✓ Моделі векторів: Об'ємні моделі векторів, виготовлені з різних матеріалів (дріт, пластик), які дозволяють змінювати напрям і розмір векторів.

✓ Графічні побудови: Візуалізація векторів на площині та в просторі, де показані операції з ними (додавання, віднімання, проєкції).

Застосування:

- Використовувати моделі під час уроку для демонстрації векторних операцій у просторі.

- Давати учням можливість самостійно маніпулювати моделями для кращого розуміння напрямків і довжин векторів.

- Використовувати графічні побудови на інтерактивних дошках для показу прикладів обчислень у просторі.

#### 4. Навчальні відеоматеріали [8].

Опис: Відеоматеріали допомагають учням краще зрозуміти теоретичні аспекти теми та побачити реальні приклади застосування векторів у різних галузях.

Види матеріалів:

- ✓ Навчальні відеоуроки: Короткі відео з поясненням основних понять і завдань.
- ✓ Відео-демонстрації: Візуальні приклади розв'язання задач на вектори, що пояснюють кроки рішення.
- ✓ Документальні фільми: Відео про застосування векторів у фізиці, інженерії, авіації, комп'ютерній графіці.

Застосування:

- Показ навчальних відеоуроків під час пояснення нової теми або як підсумок для закріплення знань.
- Використовувати відео-демонстрації для розбору складних задач на уроці або для самостійного навчання учнів вдома.
- Показ документальних відео для надання практичного контексту й прикладів застосування векторів.

#### 5. Тестові завдання та робочі зошити

Опис: Тестові завдання та робочі зошити є невід'ємною частиною закріплення знань. Вони допомагають перевірити рівень засвоєння матеріалу та відпрацювати практичні навички [29].

Види матеріалів:

- ✓ Тестові завдання: Запитання з вибором відповідей, завдання на векторні обчислення та інші вправи для перевірки розуміння теорії.
- ✓ Робочі зошити: Завдання на самостійне виконання, що включають різнорівневі вправи на роботу з векторами.

Застосування:

- Проводити тестування на різних етапах уроку (вступне, підсумкове).

- Використовувати робочі зошити для виконання завдань вдома або на уроці.
- Створювати або адаптувати тестові завдання відповідно до рівня знань учнів.

#### 6. Комп'ютерні програми та мобільні додатки [10].

Опис: Сучасні технології пропонують велику кількість інструментів для вивчення векторів. Використання програм і додатків дозволяє учням взаємодіяти з матеріалом на практичному рівні.

Види матеріалів:

- ✓ 3D-модельовання: Програми для побудови та аналізу векторів у тривимірному просторі.
- ✓ Навчальні додатки: Мобільні додатки з інтерактивними завданнями на вектори, що допомагають перевіряти знання й удосконалювати навички.

Застосування:

- Використовувати комп'ютерні програми для побудови векторів і їх перетворення у просторі під час практичних занять.
- Стимулювати учнів використовувати мобільні додатки для самостійного вивчення теми вдома.

Використання різноманітних дидактичних матеріалів робить процес навчання інтерактивним, доступним і цікавим. Це не лише сприяє глибшому розумінню теми, але й стимулює учнів до самостійної роботи та активного залучення до навчального процесу [35].

Ефективне викладання даної теми вимагає поєднання різних методів, прийомів та дидактичних матеріалів. Використання пояснювально-ілюстративного, евристичного, практичного та інтерактивного підходів дозволяє учням не лише зрозуміти теорію, але й активно застосовувати її на практиці. Завдяки інтеграції таких методів, як проектна робота, проблемне навчання та використання ігор, учні можуть глибше засвоїти матеріал і знайти йому застосування в реальних ситуаціях [4].

Важливим доповненням до цього процесу є дидактичні матеріали, які сприяють візуалізації та конкретизації абстрактних понять. Друковані схеми, таблиці, моделі векторів і мультимедійні презентації полегшують сприйняття складних понять. Інтерактивні програми, симуляції та навчальні відео залучають учнів до активної участі в навчальному процесі, підвищуючи інтерес до теми.

Поєднання цих методів і матеріалів сприяє розвитку логічного мислення, аналітичних здібностей та навичок розв'язання практичних задач.

### **2.3. Формування просторового мислення. Розвиток логічного мислення.**

Формування просторового мислення і розвиток логічного мислення — важливий аспект у навчанні математики. Ці навички є вкрай важливими для успішного навчання в різних галузях знань та в повсякденному житті.

Просторове мислення — це здатність уявляти, аналізувати та маніпулювати об'єктами в тривимірному просторі. Вектори, як геометричні об'єкти, що мають напрямок і довжину, є ідеальним інструментом для розвитку цієї здатності [11].

Логічне мислення — це здатність до послідовних міркувань, побудови доказів, аналізу інформації [27].

Ось кілька рекомендацій, методів і вправ, які сприяють формуванню просторового мислення та логіки:

#### **1. Візуалізація векторів у просторі**

- **Графічне уявлення.** Використовуйте 3D-моделі, щоб візуалізувати напрямок і довжину векторів. Онлайн-інструменти, такі як GeoGebra або Desmos, дозволяють візуально маніпулювати векторами в просторі.
- **Координатна система.** Вчіть учнів розташовувати вектори в декартовій системі координат  $(x, y, z)$ . Попросіть уявити або намалювати вектори у просторі, зважаючи на точки відліку [22].

- Фізичні моделі. Використання 3D-об'єктів (наприклад, паличок, ниток або навіть спеціальних 3D-пазлів) допомагає побачити напрямок вектора.

## 2. Використання практичних завдань

Прості приклади сприяють розумінню:

1. Складання векторів. Запропонуйте знайти суму двох векторів, що задані у вигляді координат або графічно.

2. Розкладання вектора на компоненти. Дайте завдання знайти проєкцію вектора на осі координат.

3. Обчислення довжини вектора.

## 3. Розвиток логічного мислення через властивості векторів

Логічне мислення можна розвивати, працюючи з теоретичними основами:

- Розгляньте комутативність, асоціативність та роздільність операцій над векторами.

- Проведіть аналіз різниці між скалярним добутком  $(\vec{a} \cdot \vec{b})$  та векторним добутком  $|\vec{a} \cdot \vec{b}|$ .

- Завдання на доведення, наприклад, показати, що скалярний добуток дорівнює  $|\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta$ .

## 4. Завдання для розвитку

- Геометрична інтерпретація: Дайте задачу, де необхідно визначити кут між двома векторами.

- Реальні приклади: Вектори можна уявити як маршрути літака або напрямки сили у фізиці. Учням буде цікаво розглянути їх застосування у реальному житті.

- Перетворення: Дайте завдання на поворот вектора відносно осі або площини. Це допомагає краще зрозуміти обертання у просторі.

## 5. Ігрові методи та технології [4].

- 3D-ігри: Наприклад, у Minecraft учні можуть розміщувати блоки у просторі, розвиваючи візуалізацію координат.

- Додатки для вивчення векторів: Використовуйте освітні ігри або VR-додатки.

#### 6. Рефлексія та інтерактивні вправи

- Запропонуйте учням у парах обговорити, як вектори працюють у фізиці або інженерії.

- Проведіть мозковий штурм: як можна описати рух точки у просторі за допомогою векторів.

Вивчення векторів у просторі – це потужний інструмент для розвитку важливих інтелектуальних навичок. Завдяки правильно організованому навчальному процесу можна сформувати у учнів стійкі навички просторового та логічного мислення, які будуть корисними їм у подальшому житті [17].

### 2.4. Використання міжпредметних зв'язків.

Використання міжпредметних зв'язків при вивченні векторів у просторі є ефективним способом покращення розуміння теми, мотивації учнів і розвитку їхнього інтересу до вивчення різних дисциплін. Завдяки зв'язку з фізикою, інформатикою, географією, інженерією та іншими науками, можна показати практичну значущість векторів.

#### 1. Вектори і фізика [32].

✓ Сила і рух. Вектори використовуються для опису сили, швидкості, прискорення. Наприклад:

1. Завдання: Обчислити результуючу силу, яка діє на тіло, якщо задані кілька векторів сили.

2. Візуалізація руху тіла по траєкторії за допомогою векторів швидкості та прискорення.

3. Практична задача: Визначити, чи потрапить м'яч у корзину, якщо відомий кут і початкова швидкість (вектор руху).

#### 2. Вектори і географія [33].

✓ Навігація. Використання векторів для опису руху літаків або кораблів у просторі. Зокрема, розглядається:

1. Задачі на обчислення шляху з урахуванням вітру або течії (додавання векторів швидкості).

2. Географічні координати можна представити як проєкцію точки у тривимірному просторі.

### 3. Вектори і інформатика

✓ Комп'ютерна графіка.

1. Вектори використовуються для моделювання об'єктів, руху, анімації у 2D та 3D-просторі.

2. Завдання: Створити програму, яка обчислює кут між двома векторами або довжину вектора.

✓ Алгоритми.

1. Алгоритми пошуку шляху, наприклад, в іграх, базуються на математичних операціях з векторами.

### 4. Вектори і астрономія

✓ Опис руху небесних тіл.

- Траєкторії планет описуються за допомогою векторів.

- Задачі: Визначити швидкість супутника відносно Землі.

### 5. Вектори і хімія

✓ Молекулярна геометрія.

- Розташування атомів у просторі можна описати через вектори, що задають напрямки зв'язків між атомами.

- Завдання: Побудувати модель молекули на основі заданих векторів.

### 6. Вектори і інженерія [23].

✓ Будівництво і механіка.

- Розрахунки рівноваги конструкцій на основі векторів сил.

- Завдання: Визначити, чи знаходиться система в рівновазі, якщо відомі вектори сил.

### 7. Вектори і мистецтво

✓ Перспектива в малюванні.



- Вектори використовуються для побудови правильної перспективи та проєкцій об'єктів у тривимірному просторі.

- ✓ Анімація та дизайн.

- Вектори руху застосовуються в сучасних анімаційних програмах.

8. Інтегровані завдання [16].

- ✓ Симуляції. Учні можуть створювати моделі на стику дисциплін, наприклад, розрахунок траєкторії ракети (фізика + математика) або моделювання руху тварин у природі (біологія + математика).

- ✓ Проєктна робота. Наприклад:

- Створення гри, де гравець керує об'єктом у просторі за допомогою векторів (інформатика + математика).

- Аналіз векторів в архітектурі мостів або інших конструкцій (інженерія + математика).

Міжпредметні зв'язки допомагають учням краще зрозуміти значення математичних понять у реальному житті, роблять навчання цікавішим, ефективним, допомагають застосовувати знання на практиці у реальному житті. Учні не лише засвоюють поняття векторів, а й розвивають навички міждисциплінарного мислення [13].

## ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 2

У процесі дослідження методики вивчення векторів у просторі визначено, що засвоєння цієї теми є ключовим для розвитку просторового мислення студентів та розуміння фундаментальних математичних принципів. Розглянуто різні підходи до викладання, включаючи графічну інтерпретацію, використання координатного методу, а також застосування векторної алгебри в розв'язанні практичних задач.

Особливу увагу приділено використанню інтерактивних методів навчання, що сприяють глибшому розумінню абстрактних понять. Також доведено, що формування вмінь оперувати векторами значно підвищується за умови інтеграції комп'ютерних технологій та програмного забезпечення.

Ефективність вивчення векторів залежить від правильного підбору методів навчання. Важливо поєднувати теоретичні знання з практичними вміннями, використовуючи різноманітні форми роботи. Особливу увагу слід приділяти візуалізації векторів та їхніх операцій, а також використанню сучасних технологій.

Міжпредметні зв'язки значно збагачують процес навчання, роблячи його більш цікавим та зрозумілим, дозволяє учням побачити практичне застосування векторів та усвідомити їхню важливість.

Таким чином, розробка ефективної методики вивчення векторів у просторі передбачає системний підхід, що поєднує теоретичні аспекти з практичними навичками, забезпечуючи всебічний розвиток математичних компетентностей учнів.

## **РОЗДІЛ 3. АНАЛІЗ ТИПОВИХ ПОМИЛОК ТА ЇХ УСУНЕННЯ**

Ефективність будь-якої діяльності значною мірою залежить від здатності ідентифікувати, аналізувати та усувати типові помилки. Цей процес дозволяє не лише мінімізувати втрати часу і ресурсів, але й сприяє підвищенню якості виконуваних завдань [41].

Аналіз помилок дозволяє виявити слабкі сторони процесів та підходів, які використовуються. Це, у свою чергу, є основою для вдосконалення системи роботи, формування стратегій запобігання проблемам та оптимізації рішень.

Типові помилки можуть виникати на різних етапах: від неправильної інтерпретації геометричного значення вектора до помилок у виконанні обчислень, пов'язаних із операціями, такими як додавання, скалярний чи векторний добуток, або визначення довжини вектора. Інколи труднощі пов'язані з неправильним уявленням про координатні системи, сплутуванням понять напрямку та величини або складністю у вирішенні задач у тривимірному просторі [12].

Ця робота спрямована на аналіз найпоширеніших помилок, які виникають при роботі з векторами, та на розробку ефективних стратегій їх усунення. Це дозволить поліпшити якість навчання, сприяти формуванню правильних математичних навичок і забезпечити впевненість у використанні цих знань у практичних ситуаціях.

### **3.1. Помилки при визначенні координат вектора.**

Визначення координат вектора є базовою операцією при вивченні аналітичної геометрії та лінійної алгебри. Проте саме на цьому етапі здобувачі освіти часто припускаються помилок, які можуть ускладнити подальшу роботу з векторами. Розглянемо основні типи таких помилок і причини їх виникнення [37].

#### **1. Неправильне визначення напрямку вектора**

Помилка: Учні і учениці інколи плутають порядок точок, що визначають вектор, наприклад, замість вектора  $\overrightarrow{AB}$  знаходять  $\overrightarrow{BA}$ . Це призводить до неправильного визначення напрямку та знака координат.

Причина: Недостатнє розуміння, що вектор визначається як різниця координат кінцевої точки та початкової точки.[1]

Рішення: Акцентувати увагу на правилі:

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A),$$

де  $A(x_A, y_A, z_A)$  — початкова точка, а  $B(x_B, y_B, z_B)$  — кінцева.

## 2. Сплутування координат точок [43].

Помилка: Неправильне записування координат точок  $A$  і  $B$ , що може призвести до хибного результату. Наприклад, обираються координати іншої точки або вводяться неправильні значення.

Причина: Неуважність або недостатній контроль над вихідними даними.

Рішення: Рекомендується завжди перевіряти, чи правильно записані координати точок, перед виконанням обчислень.

## 3. Ігнорування осі $z$ у тривимірному просторі

Помилка: Визначаючи координати вектора в просторі, вони інколи опускають компоненту  $z$ , помилково використовуючи формулу для двовимірного випадку.

Причина: Перенос досвіду роботи у двовимірному просторі на тривимірний, без адаптації до нових умов.

Рішення: Підкреслювати важливість урахування всіх трьох координат при роботі з векторами у просторі [25].

## 4. Неправильне трактування результату

Помилка: Отримавши координати вектора, іноді не можуть правильно інтерпретувати, що саме означає отриманий результат.

Причина: Відсутність розуміння зв'язку між числовими значеннями координат і геометричним положенням вектора.

Рішення: Використання графічного зображення векторів для пояснення зв'язку між їх координатами та напрямком.

## 5. Втрата знака під час обчислень

Помилка: Проблеми із знаками під час віднімання координат точок, наприклад,  $x_B - x_A$  може бути замінено на  $x_A - x_B$ .

Причина: Механічне виконання дій без усвідомлення геометричного сенсу.

Рішення: Розвивати звичку перевіряти правильність знаків, аналізуючи кінцевий результат із геометричної точки зору.

## 6. Неправильне розуміння базису

Помилка: Здобувачі освіти можуть не повністю розуміти, що координати вектора залежать від вибору базису.

Причина: Недостатнє розуміння поняття базису та його ролі в представленні векторів.

Рішення: Детально розглянути поняття базису, лінійної незалежності векторів та показати, як змінюються координати вектора при переході до іншого базису [24].

## 7. Проблеми з тривимірним простором

Помилка: Учні та учениці можуть відчувати труднощі при візуалізації та оперуванні векторами в тривимірному просторі.

Причина: Недостатній розвинений просторове уявлення.

Рішення: Використовувати різноманітні візуальні засоби (графіки, моделі), а також інтерактивні програми для кращого розуміння тривимірного простору [2].

## 8. Неправильне застосування векторних операцій

Помилка: Вони можуть плутати векторний добуток зі скалярним, або неправильно застосовувати правила дистрибутивності.

Причина: Недостатнє розуміння геометричного сенсу векторних операцій.

Рішення: Надати більше практичних прикладів застосування векторних операцій, пов'язаних з фізичними та геометричними задачами.

## 9. Недотримання правил округлення

Помилка: Можуть неправильно округляти результати обчислень, що призводить до значної похибки.

Причина: Недостатня увага до правил округлення.

Рішення: Нагадати про правила округлення та показати, як похибка округлення може вплинути на кінцевий результат [39].

#### 10. Відсутність геометричної інтерпретації

Помилка: Діти можуть виконувати операції з векторами формально, без розуміння геометричного сенсу отриманих результатів.

Причина: Недостатня увага до геометричної інтерпретації векторів.

Рішення: Завжди пов'язувати алгебраїчні операції з векторами з їх геометричним змістом.

Уникнення помилок при визначенні координат вектора вимагає не лише уважності, але й глибокого розуміння принципів роботи з точками та векторами. Систематична перевірка, візуалізація процесу та опрацювання завдань із поступовим ускладненням сприяють формуванню коректних навичок та усуненню типових проблем [10].

Розуміння основних принципів визначення координат вектора є фундаментальним етапом у роботі з векторами. Попередження типових помилок потребує не лише уваги до деталей, але й розвитку критичного мислення, яке допомагає школярам аналізувати результати своїх обчислень. Інтеграція наочності, практичних задач і систематичного підходу до навчання сприяє значному зниженню кількості таких помилок і підвищенню рівня математичної грамотності [28].

### 3.2. Типові помилки при виконанні дій над векторами.

Дії над векторами, такі як додавання, віднімання, множення на число, скалярний і векторний добутки, є основними операціями в математиці та її застосуваннях. Проте, під час їх виконання часто припускаються помилок через недосконале розуміння властивостей векторів або механічне виконання обчислень. Розглянемо основні типові помилки, їх причини та способи усунення.

### 1. Помилки при додаванні і відніманні векторів

Помилка: Неправильне складання координат. Наприклад, можуть переплутати порядок координат або виконувати додавання/віднімання компонент нерівного порядку:

$$\vec{A} + \vec{B} = (x_A + y_B, y_A + z_B).$$

Причина: Недостатнє розуміння принципу покомпонентного додавання/віднімання

Рішення:

Повторити, що кожна компонента результату утворюється додаванням (або відніманням) відповідних компонент:

$$\vec{A} + \vec{B} = (x_A + x_B, y_A + y_B, z_A + z_B).$$

Використовувати вправи на складання та віднімання векторів із поступовим ускладненням завдань [5].

### 2. Помилки при множенні вектора на число

Помилка: Замість множення кожної компоненти на число множать лише одну або виконують неправильні обчислення:

$$k \cdot \vec{A} = (k \cdot x_A, y_A, k \cdot z_A).$$

Причина: Неповне розуміння правила, за яким кожна компонента вектора множиться на скаляр  $k$  [37].

Рішення:

Наголосити, що множення вектора на число зберігає напрямок (або змінює його на протилежний для  $k < 0$ ), але масштабує довжину вектора.

Практикувати приклади з числовими і графічними завданнями.

### 3. Помилки при знаходженні довжини (модуля) вектора

Помилка: Під час обчислення модуля вектора можуть плутати формулу, наприклад, ігноруючи квадрат одного з компонент або забуваючи корінь:

$$|\vec{A}| = x_A^2 + y_A^2 + z_A^2.$$

Причина: Недотримання чіткої структури формули довжини вектора:

$$|\vec{A}| = \sqrt{x_A^2 + y_A^2 + z_A^2}.$$

Рішення:

Постійно нагадувати, що формула є наслідком теореми Піфагора [19].

Виконувати завдання з перевіркою результатів (наприклад, для нульового або одиничного вектора).

#### 4. Помилки при скалярному добутку векторів

Помилка: Неправильне використання формули скалярного добутку, наприклад:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = x_A \cdot x_B + y_A \cdot z_B.$$

Причина: Сплутування компонент векторів або неправильне обчислення суми добутків відповідних компонент.

Рішення:

Вивчати покрокове використання формули:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = x_A \cdot x_B + y_A \cdot y_B + z_A \cdot z_B.$$

Виконувати графічну перевірку, як скалярний добуток впливає на проєкцію одного вектора на інший [11].

#### 5. Помилки при векторному добутку векторів

Помилка: Переплутування компонент у результаті, що призводить до помилкового обчислення детермінанта:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} x_A & y_B & z_B \\ y_A & x_B & z_A \\ z_A & z_B & x_B \end{vmatrix}.$$

Причина: Недостатня практика роботи з формулою векторного добутку та обчислення детермінантів.

Рішення:

Вивчати структуру формули для кожної компоненти результату:

$$\vec{A} \times \vec{B} = (y_A z_B - z_A y_B, z_A x_B - x_A z_B, x_A y_B - y_A x_B).$$

Пояснювати геометричний зміст векторного добутку як вектора, перпендикулярного обом початковим [26].

#### 6. Помилки у визначенні напрямку або знаку результату

Помилка: Учні та учениці іноді не враховують орієнтацію вектора результату (знак) при виконанні дій, особливо при векторному добутку.

Причина: Ігнорування правил правої руки або неправильна інтерпретація геометрії.



Рішення:

Використовувати правило правої руки для визначення напрямку вектора, що є результатом векторного добутку [43].

Наголошувати, що знак залежить від порядку векторів у добутку

$$\vec{A} \times \vec{B} \neq \vec{B} \times \vec{A}.$$

#### 7. Помилки при комбінованих операціях із векторами

Помилка: Неправильне виконання послідовності дій, наприклад, при виконанні задач, що поєднують скалярні та векторні добутки:

$$(\vec{A} \cdot \vec{B}) \times \vec{C}.$$

Причина: Відсутність розуміння пріоритетів операцій і різниці між скалярним і векторним добутками.

Рішення:

Пояснювати різницю між результатами скалярного і векторного добутків.

Використовувати завдання на перевірку черговості виконання дій і пояснювати, чому певні комбінації неможливі [9].

Додаткові рекомендації:

Графічна інтерпретація: Для кожної операції надавати графічний контекст, щоб студенти могли пов'язати обчислення з геометрією.

Практика на перевірку результатів: Вправи, де після обчислень перевіряється результат через його фізичний чи геометричний зміст.

Інтерактивні інструменти: Використання програмних засобів (наприклад, GeoGebra) [1] для візуалізації дій із векторами та перевірки отриманих результатів.

Уникнення типових помилок при виконанні дій над векторами вимагає систематичної роботи, зосередженої на розумінні формул, геометричного змісту операцій та перевірки проміжних результатів. Комбінація теоретичних і практичних підходів значно покращує якість засвоєння матеріалу та зменшує кількість помилок [18].

### 3.3. Деякі помилки при розв'язуванні задач.

Розв'язування задач із векторами передбачає застосування різноманітних операцій, властивостей і понять, таких як додавання, скалярний і векторний добуток, довжина вектора, проекції тощо. Проте під час роботи над такими задачами часто припускаються помилок. Їх можна поділити на кілька основних категорій залежно від типу задач і причин виникнення [8].

#### 1. Помилки у виборі моделі задачі

Помилка: Неправильний вибір векторної моделі для задачі. Наприклад, замість представлення сил як векторів у задачі з фізики, використовуються лише їхні скалярні значення.

Причина: Невміння інтерпретувати текст задачі або відсутність розуміння, що фізичні величини, такі як швидкість чи сила, мають напрямок і тому є векторами.

Рішення:

Наголошувати, що задачі з напрямленими величинами потребують векторного підходу.

Розглядати типові приклади задач із фізики чи геометрії, демонструючи правильне створення векторних моделей.

#### 2. Неправильне подання векторів у координатній формі

Помилка: Помилкове визначення координат векторів через неправильне розуміння їхнього положення. Наприклад, у задачі на знаходження вектора переміщення між двома точками, плутають порядок координат [31].

Причина: Недостатнє усвідомлення, що вектор  $\overrightarrow{AB}$  спрямований від точки А до точки В.

Рішення:

Виконувати вправи на побудову векторів за координатами точок із графічним супроводом.

Наголошувати на важливості порядку точок при визначенні напрямку вектора.

### 3. Неправильне застосування властивостей операцій із векторами

Помилка: Недотримання правил виконання дій над векторами. Наприклад, учні та учениці можуть забути, що додавання векторів комутативне, а векторний добуток — ні.

Причина: Відсутність практики роботи з властивостями операцій.

Рішення:

Виконувати завдання, які акцентують увагу на властивостях векторних операцій [20].

Пояснювати геометричний зміст цих властивостей (наприклад, зв'язок знака векторного добутку з правилом правої руки)

### 4. Помилки у знаходженні довжини вектора

Помилка: Під час обчислення довжини (модуля) вектора школярі можуть плутати формулу або забувати корінь.

Причина: Недостатнє розуміння формули та її геометричного значення.

Рішення:

Звертати увагу на те, що довжина вектора є аналогом гіпотенузи трикутника, а формула випливає з теореми Піфагора.

Практикувати обчислення довжини вектора в двовимірному та тривимірному просторі [5].

### 5. Неправильне визначення проєкції вектора

Помилка: У задачах на знаходження проєкції вектора здобувачі освіти іноді плутають скалярну та векторну проєкцію.

Причина: Відсутність розуміння різниці між скалярною та векторною проєкцією.

Рішення:

Навчати визначати обидва типи проєкцій. Використовувати графічні приклади для демонстрації проєкцій.

### 6. Помилки у визначенні кута між векторами

Помилка: Неправильне використання формули для обчислення кута між векторами.

Причина: Неправильне запам'ятовування або використання формули.

Рішення:

Повторити, що формула має вигляд:  $\cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| \cdot |\vec{B}|}$ .

Практикувати задачі на знаходження кута із залученням числових і графічних прикладів.

#### 7. Помилки при розв'язуванні прикладних задач

Помилка: Неправильне трактування фізичного змісту задачі, наприклад, у задачах на рівнодійні сил, швидкість чи переміщення.

Причина: Ігнорування напрямків векторів або їх фізичного змісту.

Рішення:

Наголошувати на важливості врахування напрямку векторів.

Використовувати практичні приклади з реального життя (наприклад, задачі про рух або сили), пояснюючи роль векторів.

#### 8. Помилки у комбінованих задачах

Помилка: Можуть плутати порядок виконання дій у складних задачах, де потрібно застосовувати кілька операцій. Вони можуть некоректно комбінувати скалярний і векторний добутки [27].

Причина: Неправильне розуміння пріоритетів операцій і властивостей добутків.

Рішення:

Вчити аналізувати задачі, розбиваючи їх на послідовні етапи.

Практикувати завдання з поясненням, чому певні комбінації операцій є некоректними.

#### 9. Помилки при роботі з векторними рівняннями

Неправильне розкриття дужок: При множенні вектора на скаляр або при виконанні інших векторних операцій можуть неправильно розкривати дужки.

Неправильне перенесення членів рівняння: При розв'язанні векторних рівнянь здобувачі освіти можуть неправильно переносити члени з однієї частини рівняння в іншу.

Неправильне використання властивостей скалярного добутку: При використанні скалярного добутку для знаходження кута між векторами або проекції одного вектора на інший можуть виникати помилки [9].

#### 10. Помилки при роботі з векторними просторами

Неправильне визначення базису: Учні і учениці можуть невірно вибрати базис векторного простору, що призведе до неправильних координат векторів.

Неправильне розуміння поняття розмірності: можуть плутати поняття розмірності векторного простору з кількістю векторів у базисі.

Неправильне використання операцій над підпросторами: При роботі з підпросторами можуть виникати помилки при знаходженні їх перетину, суми або доповнення.

#### 11. Помилки при геометричній інтерпретації

Неправильне зображення векторів: учні та учениці можуть неправильно зображувати вектори на площині або в просторі, що призведе до неправильних висновків [2].

Неправильне розуміння геометричного сенсу векторних операцій: можуть не пов'язувати алгебраїчні операції з векторами з їх геометричним змістом.

#### 12. Помилки, пов'язані з фізичними застосуваннями

Неправильний вибір системи координат: При розв'язанні фізичних задач можуть неправильно вибрати систему координат, що ускладнить розв'язання задачі.

Неправильне врахування фізичних законів: можуть забути врахувати якісь фізичні закони при складанні векторних рівнянь.

Як уникнути цих помилок: [40]

- Ретельно аналізувати умову задачі: Перед розв'язанням задачі необхідно уважно прочитати умову та виділити основні дані.

- Використовувати графічні зображення: Графічне зображення векторів допомагає краще зрозуміти геометричний зміст задачі.

➤ Перевіряти розв’язання: Після отримання результату необхідно перевірити його на правильність, підставивши отримані значення в початкове рівняння.

➤ Використовувати різні методи розв’язання: Якщо виникають труднощі з одним методом, спробуйте розв’язати задачу іншим способом.

➤ Консультуватися з викладачем або одногрупниками: Якщо ви не можете самостійно розв’язати задачу, зверніться за допомогою до викладача або одногрупників.

Типові помилки при розв’язуванні задач із векторами виникають через недосконале розуміння теорії, механічний підхід до обчислень і відсутність перевірки проміжних результатів. Усунення цих помилок потребує систематичної роботи, яка включає теоретичне навчання, практичні вправи, графічну інтерпретацію та аналіз реальних прикладів [7].

### **3.4. Рекомендації щодо усунення помилок.**

Вивчення векторів у просторі може здатися складним, але за допомогою правильного підходу та систематичної роботи ви зможете легко освоїти цю тему. Ось кілька рекомендацій, які допоможуть вам уникнути поширених помилок:

#### **1. Твердо засвоїти основи**

Означення та властивості: Переконайтеся, що ви чітко розумієте, що таке вектор, його координати, модуль, напрямок. Вивчіть основні операції над векторами: додавання, віднімання, множення на скаляр.

Геометрична інтерпретація: Уявляйте вектори як стрілки у просторі. Це допоможе вам візуалізувати їх і краще розуміти їхні властивості.

Системи координат: Зрозумійте, як різні системи координат (декартова, циліндрична, сферична) впливають на представлення векторів [34].

#### **2. Працювати з прикладами**

Розв’язувати задачі: Чим більше задач ви розв’яжете, тим краще ви засвоїте матеріал. Починайте з простих задач і поступово ускладнюйте їх.

Аналізувати рішення: Після розв'язання задачі, уважно перевірте свій розв'язок і порівняйте його з правильним. Якщо ви зробили помилку, спробуйте зрозуміти, в чому вона полягала.

### 3. Використовувати візуальні інструменти

Графіки та діаграми: Візуальне представлення векторів допоможе вам краще зрозуміти їхні взаємозв'язки.

Комп'ютерні програми: Існують спеціальні програми, які дозволяють будувати вектори і виконувати над ними різні операції.

### 4. Робити акцент на розумінні, а не на запам'ятовуванні

Зв'язувати нові поняття з уже відомими: Спробуйте знайти аналогії між новими поняттями і тим, що ви вже вивчали [11].

Задавати питання: Якщо щось незрозуміло, не соромитися задавати питання своєму вчителю.

### 5. Працювати систематично

Складати план: Розподіляйте час на вивчення матеріалу і розв'язання задач.

Повторювати пройдений матеріал: Регулярно повторюйте пройдений матеріал, щоб закріпити знання.

Типові помилки та як їх уникнути:

✓ Плутанина зі скалярами і векторами: Пам'ятайте, що скаляр - це число, а вектор - це направлений відрізок.

✓ Неправильне виконання операцій над векторами: Уважно перевіряйте знаки і дотримуйтесь правил виконання операцій.

✓ Помилки при перетворенні координат: Будьте уважні при переході з однієї системи координат в іншу.

✓ Нерозуміння геометричного змісту задач: Спробуйте уявити собі задачу геометрично.

Слід пам'ятати, що вивчення векторів - це процес, який вимагає часу і зусиль. Не знеохочуйтеся, якщо у вас спочатку виникають труднощі. Систематична робота і наполегливість обов'язково приведуть вас до успіху [22].

## ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 3

У даному розділі було проведено детальний аналіз типових помилок, що виникають при вивченні та застосуванні векторів у просторі. Результати аналізу дозволяють зробити такі висновки:

Основні джерела помилок:

- Недостатнє розуміння теоретичних основ.
- Неправильне використання формул, зокрема під час обчислення кута між векторами, довжин та інших характеристик.
- Механічні помилки в обчисленнях, такі як плутанина між сумою та добутком модулів векторів, або некоректне використання координат.

Ключові фактори, що впливають на допущення помилок:

- Відсутність візуалізації геометричних властивостей векторів.
- Недостатня практика розв'язування задач із різними рівнями складності.
- Складність розуміння зв'язку між алгебраїчним і геометричним представленням векторів.

Рекомендації щодо усунення помилок:

- ❖ Поглиблене вивчення теоретичних основ з акцентом на геометричну інтуїцію.
- ❖ Регулярна перевірка правильності використання формул і результатів обчислень.
- ❖ Використання допоміжних засобів, таких як графічні програми, для візуалізації задач у просторі.
- ❖ Організація навчальних вправ із поступовим збільшенням складності та залученням практичних прикладів.

Загалом, систематичний підхід до аналізу та виправлення типових помилок сприяє не лише кращому засвоєнню матеріалу, а й розвитку впевненості у застосуванні векторного аналізу для розв'язання практичних задач у фізиці, геометрії та інших галузях.



## РОЗДІЛ 4. ДИДАКТИЧНІ МАТЕРІАЛИ

### 4.1. Конспекти уроків.

#### Тема: Ознака колінеарності векторів

Мета уроку:

- Сформувати знання учнів про ознаку колінеарності векторів.
- Розвинути практичні навички через творчі завдання: створення мапи та виготовлення моделей векторів із дроту.
- Вдосконалити компетентності роботи в команді та просторове мислення.

Очікувані результати навчання:

Після уроку учні зможуть:

1. Формулювати означення колінеарності векторів.
2. Використовувати ознаку колінеарності для розв'язання задач.
3. Створювати мапу з векторами руху, виготовляти фізичні моделі векторів.

Ключові компетентності:

1. Математична компетентність: Робота з формулами, практичне застосування теорії.
2. Креативність та інноваційність: Створення моделей векторів із дроту.
3. Командна робота: Спільна розробка мапи та розв'язання завдань.

Обладнання:

- Презентація.
- Матеріали для творчих завдань: дріт, ножиці, різнокольоровий папір, маркери, клей.
- Робочі аркуші.
- Великий аркуш для мапи (формат A1 або ватман).

Хід уроку

I. Організаційний момент (2 хв.)

- Привітання учнів.

- Ознайомлення з темою та планом уроку.

## II. Мотивація навчальної діяльності (5 хв.)

Ситуація для обговорення:

- Уявіть, що ви створюєте мапу туристичного маршруту або проєктуєте транспортний рух. Як показати, що напрямок двох доріг або маршрутів однаковий?

(Підводимо до поняття колінеарності.)

Показ прикладів:

- Карти, де використовуються стрілки для позначення руху.

## III. Актуалізація знань (5 хв.)

1. Повторення:

- Що таке вектор?
- Які є основні властивості векторів?

2. Усні вправи:

Учні визначають напрямки векторів на простих малюнках.

## IV. Вивчення нового матеріалу (10 хв.)

1. Означення колінеарності векторів:

Вектори називаються колінеарними, якщо вони лежать на одній прямій або паралельних прямих.

2. Ознака колінеарності:

Вектори  $\vec{a}(x_1; y_1)$  і  $\vec{b}(x_2; y_2)$  є колінеарними, якщо:  $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$ .

3. Приклади:

- Показати приклади колінеарних та неколінеарних векторів на малюнку чи у програмі GeoGebra.

4. Обговорення:

Як виглядають колінеарні вектори у просторі?

## V. Закріплення нового матеріалу (15 хв.)

Частина 1. Створення мапи

1. Розділіть клас на групи по 3-4 учні.
2. Завдання:
  - Намалювати мапу (на великому аркуші).

- Позначити на мапі 4-5 об'єктів (наприклад, школа, парк, магазин).

- Прокласти маршрути між об'єктами у вигляді векторів.

- Визначити, які маршрути є колінеарними.

Частина 2. Виготовлення моделей векторів із дроту

1. Учні отримують шматки дроту різної довжини.

2. Завдання:

- Зігнути дріт так, щоб утворити два або більше колінеарних вектори.

- Закріпити кінці на картоні чи папері, щоб продемонструвати результати.

3. Учні прикріплюють до кожного вектора ярлики з координатами та коефіцієнтами пропорційності  $k$ .

Представлення результатів:

Кожна група коротко презентує свою мапу та моделі.

VI. Підсумок уроку (5 хв.)

1. Обговорення:

- Що нового ви дізналися про колінеарність векторів?

- Як можна застосовувати ці знання у житті?

2. Математичний диктант:

Учні швидко записують відповіді:

- Чи є вектори  $\vec{a}(3; 6)$  і  $\vec{b}(1; 2)$  колінеарними?

- Запишіть формулу перевірки колінеарності.

VII. Домашнє завдання:

1. Обов'язковий рівень:

Перевірити колінеарність векторів:  $\vec{a}(6;3)$ ,  $\vec{b}(2;1)$ ;  $\vec{c}(5;10)$ ,  $\vec{d}(1;2)$ .

2. Додатковий рівень:

Намалювати власну міні-мапу із векторами руху та визначити колінеарність обраних напрямків.

3. Творче завдання: Зробити ще одну модель колінеарних векторів із доступних матеріалів (нитки, стрічки тощо).

**Тема: Координати вектора. Дії над векторами, які задано координатами.**

Мета уроку:

- Навчальна: сформувати знання про координати вектора, навчити виконувати дії над векторами, заданими координатами.
- Розвивальна: розвивати вміння застосовувати знання в реальних ситуаціях, просторове мислення, логіку, аналітичне та критичне мислення.
- Виховна: виховувати увагу до точності розрахунків, заохочувати до співпраці та роботи в команді.

Очікувані результати (компетентності):

1. Предметні компетентності:
  - ✓ Розуміння поняття координат вектора.
  - ✓ Виконання дій над векторами (додавання, віднімання, множення на число).
  - ✓ Застосування формул для знаходження довжини вектора, скалярного добутку.
2. Ключові компетентності:
  - Математична грамотність: розв'язування задач із використанням формул.
  - Інформаційно-цифрова компетентність: використання програм або графічних редакторів для візуалізації векторів.
  - Уміння вчитися: самостійний аналіз і контроль правильності виконання дій.
  - Співпраця: робота в групах для розв'язання практичних завдань.
3. Життєві компетентності:
  - Застосування знань про вектори у фізиці, інформатиці, географії (напрямки, швидкості).
  - Використання векторного аналізу у повсякденних ситуаціях (наприклад, визначення оптимальних маршрутів).

Обладнання та ресурси:

- Комп'ютер або інтерактивна дошка.

- Графічний калькулятор або програмне забезпечення (GeoGebra, Desmos).

- Роздаткові матеріали із завданнями.
- Таблиці та схеми.

Хід уроку

#### I. Організаційний момент (2 хвилини)

- Привітання учнів.
- Перевірка присутніх.
- Мотивація: «Сьогодні ми з вами дізнаємось, як за допомогою

координат описувати напрямки, знаходити довжини, виконувати обчислення, які потрібні в різних галузях – від фізики до інформатики».

#### II. Актуалізація опорних знань (5 хвилин)

- Фронтальне опитування:
  1. Що таке вектор?
  2. Як визначається напрямок і модуль вектора?
  3. Що означає поняття колінеарних і перпендикулярних векторів?
- Міні-вправа:

На дошці зображено кілька векторів  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ . Учні повинні визначити, чи є вони паралельними або перпендикулярними.

#### III. Пояснення нового матеріалу (15 хвилин)

1. Координати вектора
  - Поняття координат у просторі  $O_{xyz}$ .
  - Формула визначення координат вектора за двома точками:

$$\vec{a} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1).$$

2. Дії над векторами:
  - Додавання і віднімання векторів:

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2).$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2).$$

- Множення вектора на число:  $k\vec{a} = (kx; ky; kz)$ .
3. Довжина вектора:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

#### 4. Скалярний добуток

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

Визначення кута між векторами:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}.$$

#### IV. Закріплення знань (15 хвилин)

1. Інтерактивна вправа «Знайди помилку»: На дошці наведено приклади виконання дій із векторами з помилками. Учні працюють у парах і виправляють їх.

##### 2. Розв'язання задач:

- Задача 1: Знайти координати вектора  $\vec{a}$ , якщо його початок у точці A(1, 2, 3), а кінець у точці B(4, -1, 5).
- Задача 2: Вектори  $\vec{a}(2, -1, 3)$  і  $\vec{b}(-4, 2, -6)$ . Обчисліть  $\vec{a} + \vec{b}$  та  $2\vec{a} - 3\vec{b}$ .
- Задача 3: Обчисліть довжину вектора  $\vec{c}(-3, 4, -12)$ .

##### 3. Робота в групах. Кожна група отримує задачу з реального життя:

- Обчислення швидкості літального апарата (вектори швидкості та напрямку).
- Визначення координат точки перетину діагоналей прямокутника у просторі.

#### V. Підсумки уроку (5 хвилин)

- Рефлексія: Учні відповідають на запитання:

1. Що нового ви дізналися сьогодні?
2. Як ви можете застосувати ці знання у житті?

- Домашнє завдання:

1. Повторити теоретичний матеріал.

2. Виконати задачі:

- Знайдіть координати середини вектора  $\vec{a}(-4, 3, 2)$ .
- Обчисліть скалярний добуток  $\vec{a}(1, 2, 3)$  і  $\vec{b}(4, -1, 2)$ .
- Визначте, чи є вектори  $\vec{a}(2, -3, 4)$  і  $\vec{b}(-4, 6, -8)$  колінеарними.

## VI. Рефлексія та оцінювання (3 хвилини)

- Відзначення найбільш активних учнів.
- Підсумок результатів роботи в групах.

### **Тема: Скалярний добуток векторів**

Мета уроку:

1. Навчальна: сформувати поняття про скалярний добуток векторів, його властивості та застосування; навчити знаходити кут між векторами за допомогою скалярного добутку.
2. Розвивальна: розвивати логічне мислення, навички аналізу та синтезу, вміння застосовувати математичні знання до розв'язання задач.
3. Виховна: сприяти формуванню уважності та точності у виконанні обчислень, активізувати вміння працювати в групі.

Очікувані результати навчання:

- Учні пояснюють, що таке скалярний добуток векторів.
- Виконують обчислення скалярного добутку в координатному вигляді.
- Знаходять кут між двома векторами у просторі.
- Застосовують скалярний добуток для розв'язання задач на перпендикулярність векторів.

Компетентності, які формуються:

1. Предметні компетентності:
  - Знання формули скалярного добутку та її властивостей.
  - Застосування скалярного добутку для обчислення кута між векторами.
2. Ключові компетентності:
  - Математична грамотність: виконання обчислень із використанням формул скалярного добутку.
  - Уміння вчитися: здатність самостійно аналізувати теоретичний матеріал і застосовувати його до практичних задач.
  - Співпраця: робота в групах для виконання інтерактивних завдань.

3. Життєві компетентності:
- Розуміння ролі векторів у реальному житті (фізика, інформатика, геометрія).

- Уміння визначати взаємну орієнтацію об'єктів у просторі.

Обладнання:

- Інтерактивна дошка.
- Комп'ютери або планшети із доступом до програм GeoGebra [1] або Desmos.

- Роздатковий матеріал (завдання, таблиці).

Хід уроку:

I. Організаційний момент (2 хвилини)

- Привітання учнів.
- Перевірка готовності до уроку.
- Ознайомлення з темою і метою уроку.

II. Актуалізація опорних знань (5 хвилин)

- Фронтальні запитання:
  1. Що таке вектор? Як визначається його довжина?
  2. Які операції з векторами ви знаєте?
  3. Що таке одиничний вектор?
- Міні-завдання:

Визначте, чи є вектори  $\vec{a}(2, 3)$  і  $\vec{b}(-4, -6)$  колінеарними.

III. Пояснення нового матеріалу (15 хвилин)

1. Означення скалярного добутку:

Скалярний добуток векторів  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  — це число, що обчислюється за формулою:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi,$$

де  $\varphi$  — кут між векторами.

2. Скалярний добуток у координатній формі:

Якщо  $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ , то:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

3. Властивості скалярного добутку:



- Комутативність:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ .
  - Лінійність:  $\vec{a} \cdot (k\vec{b}) = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$ .
  - Якщо  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ , то вектори перпендикулярні.
4. Знаходження кута між векторами:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}.$$

#### IV. Закріплення знань (15 хвилин)

##### 1. Розв'язання задач на закріплення (фронтальна робота):

- Задача 1: Обчисліть скалярний добуток векторів  $\vec{a}(2, -1, 3)$  і  $\vec{b}(4, 0, -2)$ .
- Задача 2: Визначте, чи є вектори  $\vec{c}(1, 2, 0)$  і  $\vec{d}(-2, -4, 0)$  перпендикулярними.
- Задача 3: Знайдіть кут між векторами  $\vec{e}(1, 0, 1)$  і  $\vec{f}(0, 1, 1)$ .

##### Інтерактивна групова робота:

Кожна група отримує завдання:

- Побудувати вектори  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  у програмі GeoGebra.
- Визначити їхній скалярний добуток і знайти кут між ними.
- Представити результати класу.

#### V. Підсумки уроку (5 хвилин)

- Рефлексія:
  1. Що нового ви дізналися сьогодні?
  2. Як скалярний добуток допомагає знаходити кут між векторами?
  3. Де можна застосувати ці знання?
- Оцінювання:
  - Усні відповіді: +1 бал.
  - Вирішені задачі: +2 бали.
  - Групова робота: +3 бали.

#### VI. Домашнє завдання:

1. Повторити властивості скалярного добутку.
2. Виконати задачі:

- Знайдіть скалярний добуток векторів  $\vec{a}(3, -1, 4)$  і  $\vec{b}(-2, 0, 5)$ .
- Чи є вектори  $\vec{a}(1, 2, -1)$  і  $\vec{b}(2, 4, -2)$  перпендикулярними?
- Обчисліть кут між векторами  $\vec{a}(1, -1)$  і  $\vec{b}(2, 3)$ .

### **Тема: Симетрія відносно точки та площини**

Мета уроку:

1. Навчальна: сформувати чітке уявлення про симетрію відносно точки та площини у просторі, навчити виконувати симетричні перетворення.
2. Розвивальна: розвивати просторову уяву, логічне та критичне мислення.
3. Виховна: виховувати зацікавленість у вивченні математики через приклади з реального життя.

Очікувані результати:

Після уроку учні зможуть:

- розуміти поняття симетрії відносно точки та площини;
- виконувати симетричні перетворення у координатах;
- пояснювати застосування симетрії у природі, техніці, архітектурі.

Компетентності:

1. Математична грамотність: виконання симетричних перетворень, обчислення координат точок.
2. Інформаційно-цифрова: використання технологій для моделювання симетрії (GeoGebra, Desmos).
3. Критичне мислення: аналіз реальних прикладів симетрії у світі.
4. Комунікація: робота в групах для розв'язання творчих завдань.

Методи та форми роботи:

- Методи: пояснення, інтерактивні вправи, обговорення.
- Форми: робота в групах, фронтальна робота, презентація результатів.

Обладнання:

- Інтерактивна дошка.
- Комп'ютери з доступом до GeoGebra/Desmos.
- Роздаткові матеріали (таблиці, графічні завдання).

## Хід уроку

### I. Організаційний момент (2 хвилини)

- Привітання учнів.
- Перевірка присутності.
- Вступне слово: «Симетрія є всюди: у природі, архітектурі,

техніці. Сьогодні ми дізнаємося, як математика пояснює це явище».

### II. Мотивація (5 хвилин)

#### 1. Візуалізація:

Учитель демонструє зображення симетричних об'єктів (метелики, сніжинки, відображення мостів у воді) та запитує:

- Що спільного між цими зображеннями?
  - Чи можемо ми описати симетрію математично?
- #### 2. Реальне застосування:
- У природі (форми кристалів, сніжинки).
  - У техніці (проектування будівель, транспортних засобів).
  - У мистецтві (орнаменти, вітражі).

### III. Актуалізація опорних знань (7 хвилин)

#### 1. Фронтальні запитання:

- Що таке симетрія? Які види симетрії ви знаєте?
- Чим відрізняється симетрія відносно точки та площини?
- Які фігури на площині є симетричними?

#### 2. Швидка вправа:

Учитель показує точки на координатній площині та запитує:

- Знайдіть точку, симетричну до  $A(2, -3)$  відносно початку координат.
- Знайдіть точку, симетричну до  $B(-4, 1, 3)$  відносно площини  $z=0$ .

### IV. Пояснення нового матеріалу (15 хвилин)

#### 1. Симетрія відносно точки:

- Означення: Точка  $A'$  є симетричною точці  $A$  відносно точки  $O$ , якщо  $O$  є серединою відрізка  $AA'$ .
- Формула для координат:

Якщо  $A(x, y, z)$ ,  $O(x_0, y_0, z_0)$ , то:  $A'(x', y', z') = (2x_0 - x, 2y_0 - y, 2z_0 - z)$ .

2. Симетрія відносно площини:

○ Означення: Точка  $A'$  є симетричною точці  $A$  відносно площини, якщо вона розташована на перпендикулярі до площини, а площина ділить цей перпендикуляр навпіл.

○ Приклад: Для площини  $z=0$ :  $A'(x, y, z) = (x, y, -z)$ .

3. Застосування:

○ Відображення фігур у просторі.

○ Побудова симетричних конструкцій.

V. Закріплення знань (15 хвилин)

1. Практичні завдання:

○ Задача 1: Знайдіть координати точки  $A'(3, -2, 5)$ , симетричної точці  $A$  відносно точки  $O(0, 0, 0)$ .

○ Задача 2: Визначте координати точки  $B(-4, 2, -1)$ , симетричної відносно площини  $z=0$ .

○ Задача 3: Дано точки  $P(2, 1, 3)$ ,  $Q(4, 3, 1)$ . Знайдіть координати точки  $Q'$ , симетричної до  $Q$  відносно точки  $P$ .

2. Робота в групах:

Кожна група отримує завдання побудувати симетричну модель об'єкта у GeoGebra та пояснити процес.

VI. Творча частина (10 хвилин)

Завдання: «Симетрія навколо нас». Учні працюють у групах:

○ Знайдіть 2-3 приклади симетрії у природі або архітектурі.

○ Побудуйте геометричну модель одного з прикладів (на папері чи у GeoGebra).

○ Презентуйте результат.

VII. Підсумки уроку (3 хвилини)

• Рефлексія:

1. Що нового ви дізналися сьогодні?

2. Чи було цікаво виконувати завдання? Чому?

3. Як ви бачите використання симетрії у повсякденному житті?

- Оцінювання:
  - Теоретична частина: +2 бали.
  - Практичні задачі: +3 бали.
  - Групова робота: +5 балів.

#### VIII. Домашнє завдання:

1. Повторити теоретичний матеріал за конспектом.
2. Побудувати фігуру, симетричну даній відносно площини.
3. Знайти приклади симетрії в природі та мистецтві.

### **Тема: Узагальнення і систематизація знань з теми «Вектори у просторі»**

Мета уроку:

1. Освітня:
  - Узагальнити і систематизувати знання учнів про вектори у просторі.
  - Повторити основні поняття: операції над векторами, координати вектора, скалярний та векторний добуток, рівняння площини і прямої.
2. Розвивальна:
  - Розвивати просторове мислення, аналітичні навички.
  - Застосовувати теоретичні знання для розв'язання практичних завдань.
3. Виховна:
  - Формувати відповідальність та самостійність у навчанні.
  - Сприяти розвитку логічного мислення через математичну діяльність.

Очікувані результати:

Після уроку учні зможуть:

- Виконувати операції з векторами у просторі.
- Знаходити скалярний і векторний добуток векторів.
- Розв'язувати задачі, що передбачають використання рівнянь площини і прямої у просторі.
- Застосовувати знання у практичних задачах.

Ключові компетентності:

1. Математична компетентність: Здатність вирішувати завдання з векторами.
2. Цифрова компетентність: Використання програм для побудови просторових об'єктів.
3. Комунікативна компетентність: Робота в парах та групах.
4. Критичне мислення: Аналіз задач і пошук оптимальних способів їх вирішення.

Обладнання:

- Комп'ютери або планшети з програмами для побудови графіків (GeoGebra або 3D Grapher).
- Презентація.
- Задачі на картках.
- Ватман, маркери, моделі куба та інших об'ємних тіл (за можливості).

Хід уроку

I. Організаційний момент (2 хв.)

- Привітання учнів.
- Перевірка готовності до уроку.

II. Мотивація навчальної діяльності (5 хв.)

Проблемне питання:

- Як розташувати супутники в космосі так, щоб сигнал від них не перетинався?
- Як архітектори розраховують нахили площин у тривимірному просторі?

Зв'язок із життям:

- Знання про вектори у просторі застосовуються у фізиці, архітектурі, навігації, авіації.

III. Актуалізація знань (8 хв.)

1. Повторення основних понять:
  - Означення вектора у просторі.

- Координати вектора.
- Скалярний добуток .
- Векторний добуток.
- Рівняння прямої у просторі .
- Рівняння площини.

2. Коротка усна перевірка:

○ Які координати у вектора, якщо його початок у точці  $A(1; 2; 3)$ , а кінець у точці  $B(4; 5; 6)$ ?

- Як знайти модуль вектора?

IV. Основна частина (20 хв.)

1. Узагальнення знань:

- Учитель пояснює загальні стратегії роботи з задачами на вектори:
  - Розбивати задачу на під задачі (наприклад, знайти скалярний добуток, перевірити ортогональність).
  - Будувати креслення для просторових задач.

2. Практична робота:

Завдання 1:

У парі знайти:

- Скалярний добуток векторів  $\vec{a}(2; -1; 3)$  і  $\vec{b}(1; 4; -2)$ .
- Перевірити, чи є ці вектори ортогональними.

Завдання 2:

Побудувати у програмі GeoGebra точку  $A(1; 2; 3)$ , вектор  $\vec{b}(4; 5; 6)$ , і знайти рівняння прямої, що проходить через точку  $A$  у напрямку вектора  $\vec{b}$ .

Завдання

3:

У групах:

- Побудувати на ватмані тривимірну модель прямокутника (або паралелограма) і векторів, які визначають його діагоналі.
- Знайти векторний добуток цих векторів та пояснити, що він означає (нормаль до площини прямокутника).

3. Виконання творчого завдання:

Тема: Уявіть, що ви конструктори дрона.

- Задайте координати його положення у просторі у вигляді вектора.
- Знайдіть, чи рух дрона буде колінеарним заданому вектору, якщо координати його руху такі:  $\vec{m}(6; 3; 9)$ .

#### V. Підсумок уроку (5 хв.)

##### 1. Рефлексія:

- Що було найцікавішим на уроці?
- Де ці знання можна застосувати?

##### 2. Проходження вікторини на онлайн-платформі Kahoot.

##### Домашнє завдання:

##### 1. Обов'язків рівень:

- Знайти векторний добуток:  $\vec{a}(3; -2; 1)$  і  $\vec{b}(-1; 4; 0)$ .
- Знайти рівняння прямої, яка проходить через точки  $A(1; 2; 3)$  і  $B(4; 5; 6)$ .

##### 2. Додатковий рівень:

- Побудувати у GeoGebra площину, яка проходить через точки  $A(1; 0; 0)$ ,  $B(0; 1; 0)$ ,  $C(0; 0; 1)$ .

##### 3. Творче завдання:

- Уявіть, що ви конструктор мосту. Побудуйте просторову схему мосту з векторами, які задають його основні елементи.

#### 4.2. Тестові завдання.

Тести – це форма оцінювання знань, умінь та навичок, яка передбачає виконання учнями певних завдань у стандартних умовах. Вони є невід'ємною частиною сучасного освітнього процесу і використовуються для різних цілей:

- Діагностика знань: дозволяють виявити рівень засвоєння навчального матеріалу, прогалини в знаннях та нерозуміння окремих тем.
- Контроль успішності: використовуються для оцінювання результатів навчання і виставлення оцінок.
- Моніторинг якості освіти: допомагають оцінити ефективність навчального процесу, виявити сильні та слабкі сторони програм і методів навчання.



- Прогнозування успішності: можуть використовуватися для прогнозування подальших академічних досягнень учнів.

Ефективність тестів залежить від багатьох факторів, зокрема:

- Якості тестів: добре складені тести повинні бути валідними (вимірювати те, що потрібно виміряти) і надійними (показувати стабільні результати при повторному тестуванні).

- Цілей тестування: тести повинні відповідати навчальним цілям і бути адаптованими до віку та рівня розвитку учнів.

- Умов проведення тестування: важливі чіткі інструкції, достатній час для виконання завдань, тиха атмосфера.

- Інтерпретації результатів: результати тестів повинні інтерпретуватися з урахуванням інших факторів, таких як індивідуальні особливості учнів, умови навчання тощо.

Переваги тестів:

- Об'єктивність: тести дозволяють оцінити знання всіх учнів за одними й тими самими критеріями.

- Ефективність: тести дозволяють швидко оцінити знання великої групи учнів.

- Стандартизація: стандартизовані тести дозволяють порівнювати результати різних учнів та навчальних закладів.

Недоліки тестів:

- Обмеженість: тести не можуть оцінити всі аспекти знань і вмінь учнів, особливо творчі та практичні навички.

- Стрес: тести можуть викликати учнів стрес і тривогу.

- Формалізм: надмірна орієнтація на тести може призвести до формалізму в навчанні.

Існує багато різних видів тестів, які відрізняються за формою, змістом і призначенням:

- Традиційні тести: з вибором однієї правильної відповіді, тести з короткою відповіддю, есе.

- Об'єктивні тести: які мають однозначну правильну відповідь (наприклад, тести з вибором однієї правильної відповіді).
- Суб'єктивні тести: які вимагають від учнів творчого підходу і оцінюються суб'єктивно (наприклад, есе).
- Комп'ютерні тести: які проводяться за допомогою комп'ютера.
- Онлайн-тести: які проводяться в Інтернеті.

Тести є важливим інструментом оцінювання в освіті, але їх потрібно використовувати з обережністю і в поєднанні з іншими формами оцінювання. Для того, щоб тести були ефективними, необхідно враховувати їхні переваги і недоліки, а також правильно підбирати їх вид і складність відповідно до навчальних цілей.

Тест на тему: «Прямокутна система координат у просторі»

1. Які літери зазвичай використовують для позначення осей прямокутної системи координат у просторі?

- A)  $x, y, t$
- B)  $x, y, z$
- C)  $x, y, w$
- D)  $x, y, z, t$

2. Яка з наступних координат відповідає початку координат у прямокутній системі координат у просторі?

- A)  $(1, 0, 0)$
- B)  $(0, 0, 1)$
- C)  $(0, 0, 0)$
- D)  $(1, 1, 1)$

3. Як записуються координати точки, що лежить на осі  $X$  у просторі?

- A)  $(x, 0, 0)$
- B)  $(0, x, 0)$
- C)  $(0, 0, x)$
- D)  $(x, x, 0)$

4. Як визначити відстань між двома точками  $A(x_1, y_1, z_1)$  і  $B(x_2, y_2, z_2)$  у просторі?

A)  $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

B)  $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

C)  $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

D)  $\sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

5. Яка з точок не належить площині  $ХОУ$ ?

A) (2, 3, 0)

B) (1, 0, 0)

C) (0, 2, 1)

D) (0, 0, 0)

6. Координати точки, яка лежить на осі  $Z$ , будуть такими:

A) (0, 0,  $z$ )

B) ( $z$ , 0, 0)

C) (0,  $z$ , 0)

D) ( $z$ ,  $z$ , 0)

7. Відстань між точками  $A(1,2,3)$  і  $B(4,6,8)$  дорівнює:

A)  $\sqrt{14}$

B)  $\sqrt{27}$

C) 5

D)  $\sqrt{50}$

8. Які координати одиничного вектора у просторі?

A) (1, 0, 0)

B) (0, 1, 1)

C) (1, 1, 1)

D)  $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$

9. Як записати рівняння прямої, що проходить через точки  $A(1,2,3)$  та  $B(4,5,6)$ ?

A)  $(x, y, z) = (1, 2, 3) + t(4, 5, 6)$

B)  $(x, y, z) = (1, 2, 3) + t(3, 3, 3)$

C)  $(x, y, z) = (2, 3, 4) + t(1, 1, 1)$

D)  $(x, y, z) = (1, 2, 3) + t(2, 2, 2)$

10. Точка з координатами (3, 2, 1) належить:

A) осі X

B) осі Y

C) осі Z

D) жодній з осей

Тест на тему: «Вектори у просторі. Дії з векторами.»

1. Що таке вектор?

A) Величина, що має лише напрямок

B) Величина, що має лише модуль

C) Величина, що має модуль і напрямок

D) Величина, що має колір

2. Як позначається довжина вектора  $\vec{a}$ ?

A)  $|\vec{a}|$

B)  $\vec{a}$

C)  $\vec{a}^2$

D) a

3. Який вектор називається нульовим?

A) Вектор із довжиною 1

B) Вектор із довжиною 0

C) Вектор із координатами (1, 0, 0)

D) Вектор із координатами (0, 0, 1)

4. Довжина вектора  $\vec{a} = (3, 4, 0)$ :

A)  $\sqrt{5}$

B) 7

C) 5

D)  $\sqrt{25}$

5. Суму двох векторів  $\vec{a} = (1, 2, 3)$  і  $\vec{b} = (4, 5, 6)$  можна записати як:

A) (5, 7, 9)

B) (-3, -3, -3)

C) (4, 5, 6)

D) (0, 0, 0)

6. Як знайти скалярний добуток векторів  $\vec{a} = (1, 0, -1)$  і  $\vec{b} = (2, 3, -2)$ ?

A)  $2-3-2$

B)  $1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 - 1 \cdot (-2)$

C)  $1+3+2$

D)  $2+3+(-2)$

7. Вектор, який є добутком  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  (скалярний добуток), має розмірність:

A) Вектор у просторі

B) Число

C) Точка

D) Пряма

8. Результат множення вектора на число  $\vec{a} = (2, -1, 3)$ , якщо множник дорівнює 2:

A) (4, -2, 6)

B) (1, 0, 3)

C) (2, -1, 3)

D) (0, 0, 0)

9. Знайдіть векторний добуток  $\vec{a} = (1, 0, 0)$  і  $\vec{b} = (0, 1, 0)$ :

A) (0, 0, 1)

B) (0, 0, 0)

C) (1, 0, 0)

D) (0, 1, 0)

10. Знайдіть проєкцію вектора  $\vec{a} = (3, 4, 0)$  на вісь X:

A) 3

B) 5

C) 4

D) 0

11. Який із векторів є одиничним?

A) (1, 1, 1)

B) (0, 0, 1)

C)  $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$

D)  $(1, 0, 0)$

12. Вектор  $\vec{c}$  є ортогональним до  $\vec{a} = (1, 2, 3)$ , якщо:

A)  $\vec{c} = (1, -2, 1)$

B)  $\vec{c} = (0, -3, 2)$

C)  $\vec{c} = (-6, 3, 0)$

D)  $\vec{c} = (2, -1, 3)$

Тест на тему: «Координати вектора. Дії над векторами, які задано координатами»

Частина 1. Завдання з однією правильною відповіддю

1. Дано вектор  $\vec{a} = (3, -2, 5)$ . Яка його довжина?

A)  $\sqrt{38}$

B)  $\sqrt{14}$

C)  $\sqrt{5}$

D) 10

2. Які координати має вектор, що є сумою векторів  $\vec{a} = (1, 2, -1)$  і  $\vec{b} = (3, -1, 4)$ ?

A)  $(4, 1, 3)$

B)  $(2, 1, -3)$

C)  $(4, 3, 3)$

D)  $(1, -3, 4)$

3. Знайдіть скалярний добуток векторів  $\vec{a} = (1, 2, 3)$  і  $\vec{b} = (4, -1, 2)$ :

A) 10

B) 6

C) 8

D) 11

4. Який із векторів є ортогональним до  $\vec{a} = (2, 1, 0)$ ?

A)  $(-1, 2, 0)$

B)  $(1, -2, 1)$

C)  $(-1, -2, 0)$

D)  $(1, -2, 0)$

5. Як обчислюється проєкція вектора  $\vec{a} = (3, 4, 0)$  на вісь X?

A) 3

B) 4

C) 5

D) 0

6. Дано вектор  $\vec{a} = (6, -8, 0)$ . Чому дорівнює одиничний вектор у напрямку  $\vec{a}$ ?

A)  $(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, 0)$

B)  $(1, -1, 0)$

C)  $(\frac{6}{10}, \frac{8}{10}, 0)$

D)  $(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, 0)$

Частина 2. Завдання на відповідність

7. Установіть відповідність між операцією з векторами  $\vec{a} = (2, -3, 1)$ ,  $\vec{b} = (-1, 4, 2)$  та результатом.

Операція	Результат
A) Сума $\vec{a} + \vec{b}$	1) $(3, -7, -1)$
B) Різниця $\vec{a} - \vec{b}$	2) $(-3, -1, -1)$
C) Подвоєння вектора $\vec{a}$	3) $(1, 1, 3)$
D) Множення вектора $\vec{b}$ на -1	4) $(2, -6, 2)$
	5) $(1, -4, -2)$

Частина 3. Завдання з відкритою короткою відповіддю

8. Знайдіть довжину вектора  $\vec{a} = (-2, 3, -6)$ . Відповідь запишіть у вигляді десяткового числа з точністю до двох знаків після коми.

9. Знайдіть координати вектора, що утворений різницею  $\vec{b} = (4, -2, 5)$  та  $\vec{c} = (1, 3, -1)$ . Відповідь запишіть у форматі  $(x, y, z)$ .

Тест на тему: Скалярний добуток векторів

Завдання з однією правильною відповіддю

1. Що таке скалярний добуток векторів  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ?

- A) Вектор, перпендикулярний до  $\vec{a}$   
B) Число, що дорівнює добутку модулів векторів і косинуса кута між ними

- C) Сума координат векторів  
D) Різниця координат векторів

2. Яка формула обчислення скалярного добутку векторів  $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$  і  $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ ?

- A)  $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$   
B)  $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2} + \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$   
C)  $x_1y_2 + x_2y_1 + z_1z_2$   
D)  $x_1x_2 - y_1y_2 + z_1z_2$

3. Дано  $\vec{a} = (2, -3, 4)$  і  $\vec{b} = (-1, 5, 2)$ . Знайдіть їх скалярний добуток.

- A) 15  
B) -9  
C) 5  
D) 11

4. Як пов'язані два вектори, якщо їх скалярний добуток дорівнює нулю?

- A) Вектори однакові  
B) Вектори перпендикулярні  
C) Вектори мають однаковий модуль  
D) Вектори паралельні

5. Дано  $\vec{a} = (3, 0, -4)$ . Чому дорівнює скалярний добуток  $\vec{a}$  із самим собою?

- A) 25  
B) 0  
C) -25  
D)  $\sqrt{25}$

Завдання на відповідність

6. Установіть відповідність між векторами та їхнім скалярним добутком:



Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$	Скалярний добуток
A) $\vec{a}=(1, 2, 3), \vec{b}=(3, 2, 1)$	1) $-4$
B) $\vec{a}=(0, 1, -1), \vec{b}=(2, -2, 0)$	2) $10$
C) $\vec{a}=(4, -1, 0), \vec{b}=(-2, 2, 1)$	3) $0$
D) $\vec{a}=(1, 0, 1), \vec{b}=(-1, 2, 1)$	4) $2$

Завдання з відкритою відповіддю

7. Дано вектори  $\vec{a}=(2, -1, 3)$  і  $\vec{b}=(4, 0, -2)$ . Обчисліть їх скалярний добуток. Запишіть відповідь числом.

8. Два вектори  $\vec{a}=(x, 2, 1)$  і  $\vec{b}=(1, 4, 0)$  перпендикулярні. Знайдіть значення  $x$ . Запишіть відповідь числом.

Тест на тему: «Симетрія відносно точки та площини»

Частина 1. Теоретичні запитання

1. Що таке симетрія відносно точки?

а) Перетворення, при якому всі точки фігури переміщуються на однакову відстань від заданої точки.

б) Перетворення, при якому кожна точка фігури має симетрично протилежну точку щодо заданої точки.

в) Перетворення, при якому всі точки фігури розташовуються на однаковій відстані від площини.

2. Що таке симетрія відносно площини?

а) Перетворення, при якому всі точки фігури переміщуються на однакову відстань уздовж прямої.

б) Перетворення, при якому кожна точка фігури має симетричну точку на однаковій відстані від площини.

в) Перетворення, при якому всі точки фігури залишаються нерухомими.

3. Як називається точка, відносно якої виконується симетрія?

а) Центр симетрії

б) Вісь симетрії

в) Точка перетину

4. Як називається площина, відносно якої виконується симетрія?

а) Площина паралелізму

б) Площина симетрії

в) Вісь координат

5. Яка фігура завжди має симетрію відносно своєї середини?

а) Коло

б) Трикутник

в) Прямокутник

Частина 2. Практичні завдання

6. Встановіть координати точки В, симетричної точці  $A(3, -2, 5)$  відносно початку координат.

7. Дано площину  $x+y+z=0$ . Знайдіть координати точки, симетричної точці  $M(2, -1, 3)$  відносно цієї площини.

8. Доведіть, що точка  $P(0, 0, 0)$  є центром симетрії для куба, вершини якого мають координати  $(\pm a, \pm a, \pm a)$ .

Частина 3. Творче завдання

9. На кресленні зобразіть фігуру та її симетричне відображення:

а) Відносно точки  $O(0, 0)$  на площині.

б) Відносно площини  $z=0$  у тривимірному просторі.

Тест на тему: «Ознака колінеарності векторів»

Частина 1. Теоретичні запитання

1. Що означає, що два вектори є колінеарними?

а) Вектори мають однакову довжину.

б) Вектори лежать на паралельних або одній прямій.

в) Вектори перпендикулярні один одному.

2. Яка умова колінеарності векторів у координатному вигляді?

а) Коефіцієнти пропорційності координат рівні.

б) Добуток координат рівний нулю.

в) Координати векторів мають протилежний знак.

3. Якщо два вектори  $\vec{a}$  та  $\vec{b}$  колінеарні, то їхній векторний добуток:

а) Рівний нулю.

б) Рівний одиниці.

в) Не визначається.

4. Яке співвідношення є ознакою колінеарності для векторів  $\vec{a}$   $(x_1, y_1, z_1)$  та  $\vec{b}$   $(x_2, y_2, z_2)$ ?

а)  $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$

б)  $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$

в)  $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2$

5. Чи є нульовий вектор колінеарним будь-якому іншому вектору?

а) Так, завжди.

б) Ні, ніколи.

в) Лише якщо довжина іншого вектора дорівнює одиниці.

Частина 2. Практичні завдання

6. Вектори  $\vec{a}$   $(3, -6, 9)$  та  $\vec{b}$   $(1, -2, 3)$ . Визначте, чи є вони колінеарними.

7. Чи є вектори  $\vec{c}$   $(2, 4, -1)$  та  $\vec{d}$   $(-4, -8, 2)$  колінеарними? Поясніть.

8. Знайдіть значення  $k$ , щоб вектори  $\vec{e}$   $(k, 4, -8)$  та  $\vec{f}$   $(2, -1, 4)$  були колінеарними.

Частина 3. Творче завдання

9. Побудуй вектори  $\vec{a}$  та  $\vec{b}$  на площині так, щоб вони були:

а) Колінеарними.

б) Неколінеарними. Поясніть, як можна змінити один із векторів, щоб вони стали колінеарними.

#### 4.3. Задачі для самостійного розв'язання.

Розв'язування задач на вектори у просторі в старшій школі – це не просто виконання навчального завдання, а й важливий крок у розвитку багатьох корисних навичок та розумінні навколишнього світу. Ось чому ця тема є такою значущою:

Розвиток просторової уяви

➤ Візуалізація: вектори допомагають уявити та описати напрямки і величину різних величин у тривимірному просторі. Це важливо для розуміння фізичних явищ, геометричних об'єктів та багатьох інших дисциплін.

➤ Абстрактне мислення: перехід від плоских фігур до об'ємних вимагає більшої абстрактності. Вектори допомагають розвивати цю здатність.

Підготовка до вищих навчальних закладів

✓ Фізика: вектори є основою для опису сил, швидкостей, прискорень та інших фізичних величин.

✓ Інженерія: багато інженерних розрахунків базуються на векторному аналізі.

✓ Комп'ютерна графіка: вектори використовуються для створення тривимірних моделей та анімацій.

Формування логічного мислення

- Аналіз задач: розв'язування задач на вектори вимагає аналізу умови, вибору правильних формул та методів розв'язання.

- Синтез знань: вектори об'єднують знання з алгебри, геометрії та тригонометрії.

- Доведення: часто доводиться доводити певні твердження, використовуючи властивості векторів.

Отже, вектори у просторі дають учням універсальний інструмент для розв'язання задач у багатьох сферах. Навіть якщо учень не обере професію, де це знадобиться, навички логічного мислення, просторової уяви та структурного підходу будуть корисними у житті.

Рівень 1: Базовий

1. Дано вектори  $\vec{a} (2, -1, 3)$  і  $\vec{b} (4, -2, 6)$ . Визначте, чи є вектори  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  колінеарними.

2. Знайдіть координати вектора  $\vec{c}$ , який дорівнює сумі векторів  $\vec{a} (1, 2, -3)$  і  $\vec{b} (-4, 0, 5)$ .

3. Обчисліть довжину вектора  $\vec{a} (-3, 4, 1)$ .

4. Визначте координати середини відрізка, заданого точками  $A(2, 3, -1)$  і  $B(-4, 0, 5)$ .
5. Дано точки  $A(1, 2, 3)$ ,  $B(3, 6, 9)$ ,  $C(-2, -4, -6)$ . Чи лежать ці точки на одній прямій?
6. Вектор  $\vec{a}(5, -2, 4)$ . Знайдіть довжину цього вектора. Нормуйте цей вектор (знайдіть його одиничний вектор).
7. Дано точки  $A(2, -1, 3)$  і  $B(4, 5, -2)$ . Знайдіть координати вектора  $\overrightarrow{AB}$ .
8. Визначте, чи перпендикулярні вектори  $\vec{a}(1, 0, -1)$  і  $\vec{b}(2, -2, 2)$ .
9. Чи є вектори  $\vec{c}(3, 2, -1)$  та  $\vec{d}(9, 6, -3)$  паралельними? Поясніть.
10. У трикутнику  $ABC$  задані точки:  $A(0, 0, 0)$ ,  $B(3, 4, 0)$ ,  $C(3, 0, 4)$ .

Знайдіть довжини сторін трикутника  $AB$ ,  $BC$  і  $AC$ .

Рівень 2: Середній

1. Дано вектори  $\vec{a}(2, -3, 4)$  і  $\vec{b}(1, -1, 2)$ .
  - Обчисліть їхній скалярний добуток.
  - Визначте кут між векторами.
2. Точка  $A(1, 1, 1)$  і точка  $B(4, 3, 2)$  задають вектор  $\overrightarrow{AB}$ .
  - Обчисліть довжину цього вектора.
  - Знайдіть координати точок, які ділять цей вектор у відношенні 1:2 і 2:3.
3. Дано вектори  $\vec{a}(3, -1, 2)$  і  $\vec{b}(-2, 1, 4)$ . Обчисліть координати вектора  $\vec{c}$ , який дорівнює  $2\vec{a} - 3\vec{b}$ .
4. Чи є вектори  $\vec{a}(2, 3, -4)$  і  $\vec{b}(-4, -6, 8)$  антипаралельними? Поясніть.
5. Знайдіть рівняння площини, яка проходить через точку  $A(1, 2, 3)$  і перпендикулярна до вектора  $\vec{n}(2, -1, 4)$ .

Рівень 3: Підвищеної складності

1. Точки  $A(1, 0, 2)$ ,  $B(3, -1, 5)$ ,  $C(4, 2, 0)$ .
  - Знайдіть векторне рівняння прямої, яка проходить через точки  $A$  і  $B$ .

- Перевірте, чи точка С лежить на цій прямій.
- 2. Обчисліть змішаний добуток векторів  $\vec{a}(2, 0, -1)$ ,  $\vec{b}(1, -3, 4)$ ,  $\vec{c}(0, 2, -3)$ . Визначте, чи є ці вектори компланарними.
- 3. Дано вектори  $\vec{a}(1, -2, 3)$  і  $\vec{b}(4, -1, -2)$ .
  - Знайдіть векторний добуток  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ .
  - Обчисліть площу паралелограма, утвореного цими векторами.
- 4. Знайдіть точку перетину прямої, заданої параметричними рівняннями:  $x = 2 + t$ ,  $y = -1 + 2t$ ,  $z = 3 - t$ , з площиною, заданою рівнянням  $3x - y + 2z = 7$ .
- 5. У просторі дано трикутник ABC, вершини якого мають координати  $A(1, 1, 1)$ ,  $B(4, -2, 3)$ ,  $C(2, 3, 0)$ . Знайдіть площу цього трикутника за допомогою векторів.

Рівень складності: середній

1. Дано: Три точки в просторі:  $A(1, 2, 3)$ ,  $B(4, 5, 6)$ ,  $C(7, 8, 9)$ .
  - ✓ Знайдіть координати векторів  $\overrightarrow{AB}$  і  $\overrightarrow{AC}$ .
  - ✓ Обчисліть скалярний добуток векторів  $\overrightarrow{AB}$  і  $\overrightarrow{AC}$ .
  - ✓ Перевірте, чи вектори  $\overrightarrow{AB}$  і  $\overrightarrow{AC}$  колінеарні.
2. Дано: Вектори  $\vec{a} = (2, -1, 3)$  і  $\vec{b} = (1, 2, -2)$ .
  - ✓ Знайдіть вектор  $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ .
  - ✓ Обчисліть довжину вектора  $\vec{c}$ .
  - ✓ Знайдіть косинус кута між векторами  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ .
3. Дано: Площина задана рівнянням  $2x - y + 3z - 6 = 0$ .
  - ✓ Знайдіть нормальний вектор до цієї площини.
  - ✓ Знайдіть координати точки, яка належить цій площині.
  - ✓ Складіть рівняння прямої, яка перпендикулярна до даної площини і проходить через точку  $M(1, 2, 1)$ .

Рівень складності: високий

1. Дано: Чотири точки в просторі A, B, C, D.
  - Доведіть, що точки A, B, C лежать в одній площині.
  - Знайдіть об'єм тетраедра ABCD.

2. Дано: Два вектори  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ .

- Знайдіть векторне добуток векторів  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ .
- Знайдіть площу паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ .
- Складіть рівняння площини, яка проходить через точку  $O(0, 0, 0)$

і перпендикулярна до вектора  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ .

## ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 4

Враховуючи складність матеріалу, застосування різноманітних дидактичних розробок є надзвичайно важливим для забезпечення високого рівня розуміння теми учнями та розвитку їхніх навичок.

В цьому розділі було представлено п'ять моїх розробок планів-конспектів уроків, які враховують ключові компетентності учнів. Кожен з уроків включає в себе різноманітні форми та методи навчання, що дозволяють максимально ефективно задовольнити потреби учнів різних рівнів підготовки.

Перш за все, використання графічних матеріалів, таких як схеми, малюнки та графіки, значно полегшує сприйняття учнями абстрактних понять. За допомогою графічних ілюстрацій можна наочно продемонструвати, як змінюється положення вектора в просторі, що дозволяє учням краще уявити його взаємодію з іншими векторами та об'єктами.

Не менш важливим є використання інтерактивних матеріалів, зокрема комп'ютерних програм та онлайн-платформ, які дозволяють учням моделювати вектори у просторі, змінювати їх величину та напрямок, що дає змогу зрозуміти їхні властивості в реальному часі. Такі матеріали сприяють розвитку в учнів просторового мислення та навичок роботи з математичними моделями. Використання таких технологій також дозволяє здійснювати візуалізацію більш складних тем.

Важливим аспектом є підбір задач і вправ різних рівнів складності. Логічно структуровані вправи, починаючи від простих задач і поступово переходячи до складніших, дозволяють учням поступово освоювати нові концепції, не відчуючи перевантаження.

Важливим є також включення в навчальний процес методів активного навчання, таких як групова робота. Це сприяє розвитку комунікативних навичок, а також дозволяє вчителю відслідковувати рівень засвоєння матеріалу учнями та коригувати навчальний процес.



## ВИСНОВКИ

У ході виконання магістерської роботи було детально розглянуто методику вивчення теми «Вектори у просторі» в курсі математики середньої школи на рівні стандарту. Дослідження показало, що вивчення цієї теми є важливою складовою навчального процесу, оскільки вектори є основним інструментом для вирішення різноманітних задач у геометрії, фізиці, інженерії та інших науках, а також необхідною складовою математичної освіти на всіх етапах навчання.

Основною метою роботи було дослідити та запропонувати ефективні методи викладання векторної алгебри, враховуючи сучасні підходи до навчання та вимоги освітніх стандартів. В результаті було встановлено, що для успішного засвоєння цієї теми учнями необхідно використовувати різноманітні методи і форми навчання, включаючи активні методи навчання, інтерактивні технології та застосування дидактичних матеріалів, що сприяють кращому розумінню абстрактних математичних понять.

Зокрема, було підкреслено важливість використання графічних матеріалів і комп'ютерних програм, які дозволяють учням наочно побачити вектори в просторі, здійснювати операції з ними та аналізувати їхні властивості. Такі методи дають змогу значно полегшити засвоєння складних концепцій, зокрема тривимірних векторів, та забезпечити більш глибоке розуміння основних математичних операцій, таких як додавання векторів, скалярний і векторний добутки.

Що стосується методичних підходів, то в роботі було акцентовано на необхідності поєднання традиційних методів з сучасними інноваційними технологіями. Застосування інформаційно-комунікаційних технологій, зокрема інтерактивних додатків і онлайн-ресурсів, дозволяє створити можливість для самостійного навчання учнів та учениць, здійснювати диференціацію навчання і робити процес засвоєння матеріалу більш індивідуалізованим. Це дає можливість не лише запам'ятовувати теоретичні положення, але й активно застосовувати знання на практиці.

Крім того, важливою складовою методики є розробка дидактичних матеріалів, що відповідають вимогам навчальних програм та стандартів освіти. Використання задач різного рівня складності, що охоплюють як теоретичні, так і практичні аспекти, дозволяє створити систему вправ, що поступово вводить учнів у складніші аспекти векторної алгебри та допомагає розвивати в них здатність до аналітичного мислення. Особливо важливими є завдання, що поєднують математику з реальними прикладами з фізики чи інженерії, що дозволяє підвищити мотивацію здобувачів освіти до навчання та показати практичне значення векторів у різних сферах життя.

Окремо варто зазначити, що ефективність навчання значною мірою залежить від кваліфікації вчителя та його здатності адаптувати методику викладання до потреб та інтересів учнів та учениць. Важливо, щоб педагог володів як традиційними методами, так і новітніми підходами, був здатний правильно оцінити рівень засвоєння матеріалу та коригувати навчальний процес в залежності від результатів.

Загалом, методика вивчення векторів у просторі на рівні стандарту має на меті не лише освоєння теоретичних знань, а й розвиток практичних навичок, необхідних для розв'язування складних задач. Виявлено, що при правильному підході до навчання, яке включає використання різноманітних методів і технологій, школярі можуть успішно засвоїти ці важливі математичні концепції, що сприяє підготовці їх до більш складних тем та розвитку критичного і аналітичного мислення.

Таким чином, реалізація запропонованої методики дозволяє значно підвищити ефективність навчання векторів у просторі, а також створює сприятливі умови для розвитку учнів та досягнення високих результатів у засвоєнні математичних знань.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. GeoGebra. Онлайн-ресурс. Вивчення векторної алгебри за допомогою інтерактивного середовища. – Режим доступу: <https://www.geogebra.org>.
2. Аксельрод Р. Г. Комп'ютерні технології у викладанні математики. – Харків: Ранок, 2019. – 230 с.
3. Безущак Л. В. Теорія і практика навчання математики: посібник. – Київ: Освіта, 2020. – 256 с.
4. Белкін А. В. Практичне застосування векторів у школі. – Одеса: Вид. дім «Україна», 2021. – 210 с.
5. Бойко В. Г. Дидактичні матеріали для навчання векторів. – Львів: Каменярь, 2021. – 170 с.
6. Буряк В. К. Сучасна школа: методика навчання математики. – Харків: Ранок, 2018. – 198 с.
7. Васильєв Ю. І. Педагогіка викладання математики. – Харків: Основа, 2019. – 190 с.
8. Вебер К. Векторний аналіз у фізиці та математиці. – Львів: Світ, 2017. – 150 с.
9. Вільямс К. Вектори у 3D-графіці. – Київ: Вид. центр «Сучасність», 2020. – 150 с.
10. Гаврилюк І. Ю. Математичне моделювання та вектори. – Дніпро: Інтерпрес, 2021. – 165 с.
11. Гаврилюк П. І. Міжпредметні зв'язки у викладанні математики. – Полтава: Світло, 2020. – 200 с.
12. Гейзер В. Сучасні методики викладання математики. – Одеса: Наука, 2021. – 250 с.
13. Головань О. М. Викладання аналітичної геометрії: навчально-методичний посібник. – Київ: Знання, 2021. – 300 с.
14. Грассман Г. Теорія лінійної алгебри. – М.: Наука, 2019. – 350 с.

15. Давидович І. І. Історія розвитку векторів у математиці. – Чернівці: Друк, 2019. – 220 с.
16. Декарт Р. Основи аналітичної геометрії. – Львів: Наука, 2020. – 180 с.
17. Джонс М. Інноваційні підходи до викладання геометрії. – Київ: Вид. центр «Освіта», 2021. – 230 с.
18. Джонс Т. Інтеграція математики та фізики через вектори. – Харків: Світ знань, 2018. – 170 с.
19. Кабінет Міністрів України. Державний стандарт базової середньої освіти (затверджений постановою від 30 вересня 2020 р. № 898). – Режим доступу: <https://osvita.gov.ua>.
20. Карпова О. М. Використання векторів у фізиці та математиці. – Полтава: Фоліо, 2021. – 198 с.
21. Коваленко Ю. М. Використання 3D-моделей у навчанні геометрії. – Тернопіль: Навчальна книга, 2020. – 240 с.
22. Колесников О. В. Методологія викладання геометрії. – Київ: Либідь, 2019. – 180 с.
23. Коноваленко П. Г. Геометрія у школі: сучасний погляд. – Львів: ПП «Каменярь», 2020. – 156 с.
24. Куликовська Л. П. Дидактика математичних понять. – Одеса: Фоліо, 2019. – 225 с.
25. Кучеренко Л. Г. Логіка та методика викладання геометрії. – Миколаїв: Академія, 2019. – 195 с.
26. Литвин О. В. Вектори у програмуванні: від основ до практики. – Київ: Вид. група «Альфа», 2020. – 220 с.
27. Лоренц Г. Векторні простори: основи та застосування. – Харків: Вид. група «Академія», 2018. – 210 с.
28. Мартинюк І. В. Методика викладання геометрії у школі. – Полтава: Дивосвіт, 2020. – 189 с.
29. Міністерство освіти і науки України. Математика. Рівень стандарту: програма для 10-11 класів. – Київ: МОН, 2018. – 45 с.

30. Мірошніченко О. В. Основи лінійної алгебри. – Київ: Освіта, 2020. – 270 с.
31. Мунтян Л. В. Інноваційні підходи до викладання математики. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2020. – 178 с.
32. Ньютон І. Закони механіки: теоретична фізика. – Львів: Світ, 2018. – 210 с.
33. Полат Е. С. Метод проектів у навчанні математики. – Київ: Освіта, 2019. – 200 с.
34. Пухальський І. С. Векторна алгебра в задачах. – Київ: Акт, 2018. – 300 с.
35. Романенко І. В. Викладання теми «Вектори» в старших класах. – Львів: Світ, 2019. – 180 с.
36. Сидоренко Л. П. Використання тестів у викладанні математики. – Черкаси: Друкарня, 2020. – 160 с.
37. Симоненко Т. В. Практика навчання векторів у старшій школі. – Черкаси: Богдан, 2021. – 134 с.
38. Смирнов В. П. Комп'ютерні симуляції у векторній геометрії. – Харків: Ранок, 2021. – 210 с.
39. Суханова Л. П. Використання інформаційних технологій у викладанні математики. – Харків: Вища школа, 2020. – 276 с.
40. Ткачук В. В. Вектори у просторі: методичні рекомендації. – Київ: НМК, 2018. – 125 с.
41. Фадєєв В. В. Алгебра та геометрія в контексті сучасної освіти. – Київ: Наукова думка, 2019. – 250 с.
42. Чернов А. М. Аналітична геометрія: базові поняття. – Харків: Основа, 2017. – 300 с.
43. Шевченко М. В. Задачі з аналітичної геометрії. – Черкаси: Букрек, 2020. – 187 с.

Таблиця координат одиничних векторів.

Одиничний вектор	Познач ення	Коорди нати	Напрямок
Одиничний вектор вздовж осі X	$\mathbf{i}$	$(1, 0, 0)$	Позитивн ий напрямок осі X
Одиничний вектор вздовж осі Y	$\mathbf{j}$	$(0, 1, 0)$	Позитивн ий напрямок осі Y
Одиничний вектор вздовж осі Z	$\mathbf{k}$	$(0, 0, 1)$	Позитивн ий напрямок осі Z

### Формули для дій над векторами.

Операція	Формула	Опис
Додавання векторів	$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{z} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$	Сума двох (трьох) векторів: додаються їхні координати по кожній осі.
Віднімання векторів	$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$ $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{z} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$	Різниця між векторами: віднімаються відповідні координати.
Множення вектора на число	$\lambda \cdot \vec{a} = (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot y_1)$ $\lambda \cdot \vec{a} = (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot y_1, \lambda \cdot z_1)$	Множення вектора на скаляр: кожна координата множиться на число $\lambda$ .
Скалярний добуток (добуток унітарних векторів)	$\vec{a} \cdot \vec{b} =  \vec{a}   \vec{b}  \cos \theta$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$	Скалярний добуток: сума добутків відповідних координат векторів.
Модуль вектора	$ \vec{a} \cdot \vec{b}  =  \vec{a}   \vec{b}  \sin \theta$	Векторний добуток двох векторів дає новий вектор, який перпендикулярний до площини
Векторний добуток	$ \vec{a} \cdot \vec{b}  = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$	Векторний добуток: вектор, що перпендикулярний до площини, визначеній двома векторами.

## Приклади розв'язання задач

### Приклад 1: Додавання векторів

Задача: Дано два вектори  $\vec{a}=(2, 3, -1)$  та  $\vec{b}=(4, -2, 5)$ . Знайти вектор  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ .

Розв'язок: Для додавання векторів додаємо відповідні координати:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (2+4, 3+(-2), -1+5)$$

Отже, вектор  $\vec{c} = (6, 1, 4)$ .

### Приклад 2: Віднімання векторів

Задача: Дано два вектори  $\vec{a}=(5, 2, 1)$  та  $\vec{b}=(3, 4, -2)$ . Знайти вектор  $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ .

Розв'язок: Для віднімання векторів віднімаємо відповідні координати:

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = (5-3, 2-4, 1-(-2))$$

Отже, вектор  $\vec{d} = (2, -2, 3)$ .

### Приклад 3: Скалярний добуток векторів

Задача: Дано два вектори  $\vec{a}=(1,2,3)$  та  $\vec{b}=(4, -1, 2)$ . Знайти їхній скалярний добуток  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ .

Розв'язок: Скалярний добуток векторів обчислюється за формулою:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Підставимо значення:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 = 4 - 2 + 6 = 8$$

Отже, скалярний добуток  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 8$ .

### Приклад 4: Модуль вектора

Задача: Дано вектор  $\vec{a}=(3, -4, 12)$ . Знайти його довжину.

Розв'язок: Довжина вектора обчислюється за формулою:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Підставимо значення:

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 12^2} = 13$$



Отже,  $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 13$ .

#### Приклад 5: Векторний добуток векторів

Задача: Дано два вектори  $\vec{a} = (1, 2, 3)$  та  $\vec{b} = (4, 5, 6)$ . Знайти їхній векторний добуток  $\vec{a} \times \vec{b}$ .

Розв'язок: Векторний добуток векторів обчислюється за формулою:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

Розв'язуємо детермінант:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \hat{i} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

Обчислюємо детермінанти:

$$\hat{i} (2 \cdot 6 - 3 \cdot 5) = \hat{i} (12 - 15) = -3\hat{i}$$

$$-\hat{j} (1 \cdot 6 - 3 \cdot 4) = -\hat{j} (6 - 12) = 6\hat{j}$$

$$\hat{k} (1 \cdot 5 - 2 \cdot 4) = \hat{k} (5 - 8) = -3\hat{k}$$

Отже, векторний добуток:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = -3\hat{i} + 6\hat{j} - 3\hat{k}$$

#### Приклад 6: Кут між векторами

Дано вектори  $\vec{a} = (3, 4)$  і  $\vec{b} = (1, -1)$ . Знайти кут між ними.

Розв'язок: Кут між векторами обчислюється за формулою:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

1. Обчислюємо скалярний добуток:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) = 3 - 4 = -1$$

2. Знайдемо модулі векторів:

$$|\vec{a}| = \sqrt{9 + 16} = 5,$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

3. Підставимо у формулу:

$$\cos \varphi = \frac{-1}{5\sqrt{2}}$$

Отже, кут між векторами визначається через  $\arccos$ .

### Приклад 7: Рівняння прямої у просторі

Задача: Знайти параметричне рівняння прямої, що проходить через точку  $P(1,2,3)$  і паралельна вектору  $\vec{d}=(2, -1, 4)$ .

Розв'язок: Параметричне рівняння прямої задається так:

$$x=x_0+td_1,$$

$$y=y_0+td_2,$$

$$z=z_0+td_3,$$

де  $t$  – параметр,  $(x_0, y_0, z_0)$  – точка на прямій, а  $(d_1, d_2, d_3)$  – координати напрямного вектора.

Підставляємо значення:

$$x=1+2t, y=2-t, z=3+4t$$

Отже, рівняння прямої:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$$

### Приклад 8: Перевірка колінеарності векторів

Задача: Дано два вектори  $\vec{a}=(2, 4, 6)$  та  $\vec{b}=(1, 2, 3)$ . Перевірити, чи є вони колінеарними.

Розв'язок: Вектори колінеарні, якщо існує число  $k$ , таке що:

$$\vec{a}=k\vec{b}$$

Перевіряємо відношення відповідних координат:

$$\frac{a_1}{b_1}=2,$$

$$\frac{a_2}{b_2}=2,$$

$$\frac{a_3}{b_3}=2$$

Оскільки всі відношення рівні ( $k=2$ ), то вектори  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  є колінеарними.